AZ ELECTRODYNAMOMETER ÁLTALÁNOS ELMÉLETE.

ADALÉK AZ ELECTRODYNAMIKUS INDUCTIÓ DIFFERENTIÁL-EGYENLETEINEK ALKALMAZÁSÁHOZ ÉS INTEGRÁTIÓJÁHOZ.

Dr. FRÖHLICH IZIDOR

L. TAGTÓL.

«. . . τὸ γὰρ γράμμα ἀποκτέινει,
τὸ δὲ πνεῦμα ζωοποιεῖ».

(*'Επιστολὴ Παύλου πρὸς Κορινθίους*, B, III, 6.)

A M. T. AKADÉMIA ÁLTAL A BÉZSÁN-DIJJAL (1887) KOSZORÚZOTT PÁLYAMŰ KIVONATA.

HÁROM TÁBLÁVAL.

A M. TUD. AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK KÜLÖN KIADVÁNYA. 1888. I.

BUDAPEST.

1888.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

BEVEZETÉS.*

1. Az electrodynamikus és az electromagnetikus inductió törvényei, mint a tapasztalat szigorú kifejezése.

1. §. *Az electromagnetikus és az electrodynamikus inductió tapasztalati tételei.*

Azon jelenségekre vonatkozólag, a melyeknél általánosságban véve változó intensitású galvani áramok és változó mágnesezésű mágnesek egymásra hatnak és melyeknél ez a hatás az áramot vivő vezetők mozgásának és alakjának változtatásában, továbbá maguknak az áramok intensitásának és a mágnesek helyzetének és mágnesezésének változtatásában nyilvánúl, a tapasztalat változatlan törvények fennállását mutatta ki.

J. C. MAXWELL, C. NEUMANN és J. STEFAN ** szerint a nevezett empirikus törvények a következők:

---

* A M. T. Akadémia 1884. évi nagygyűlésén a következő pályakérdést tűzte ki:

«Az elektrodynamometer mechanikája mind eddig nincsen szigorúan megállapítva, minek oka az, hogy a lineár vezetőkben indukált elektromos áramoknak simultán differentiál-egyenletei eddigelé csak néhány egyszerű esetben nyertek megoldást.

Kívántatik ezen egyenletek oly általánosabb alakjainak integrátioja, melyek a dynamometer szigorú elméletét adják.

Az elméleti eredmények igazolására szolgáló netáni kisérleti összehasonlítások és mérések kívánatosak ugyan, de a díj tisztán elméleti pályamunkáknak is oda ítélhető.»

Határnap 1886 deczember 31.

A M. T. Akadémia 1887. évi nagygyűlésén szerző: «*Az electrodynamometer általános elmélete*» czímű munkájának itélte oda a díjat.

Jelen Értekezés tartalmazza a pályanyertes dolgozat általános részének átdolgozását és a követett elméleti eljárások egyikének alkalmazását néhány egyszerű electromagnetikus és electrodynamikus mérési módszerre.

Ellenben, terjedelmüknél fogva, a dolgozat negyedik és ötödik része el lett hagyva; az előbbi azon eset részletes feldolgozását tartalmazta, midőn a külső electromotorius erők állandók, az utóbbi, midőn ezen erők az időnek periodikus függvényei; mindkét esetben az elmélet a második közelítést bezáró pontossággal lett kifejtve és a szövegben tárgyalt kétféle eljárása az integratiónak alkalmazva.

** J. C. MAXWELL: A treatise on electricity and magnetism. II. k. 195—210. l. Oxford, 1873.

C. NEUMANN: Electrodynamische Untersuchungen mit besonderer Rücksicht auf das Princip der Energie. Berichte über die Verhandlungen der K. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physikalische Classe. XXIII. k. 386—449. l. Leipzig, 1871.

J. STEFAN: Ueber die Gesetze der electrodynamischen Induction. Sitzungsberichte d. math. naturw. Klasse der k. Akademie der Wissenschaften. Zweite Abtheilung. LXIV. k. 193—224. l. Wien, 1871. STEFAN tárgyalásának szigorúsága ellen felszólalások történtek. (V. ö.: RIECKE, Fortschritte der Physik im Jahre 1872. 602—3. l.; továbbá UMOW, Wiedemann's Annalen d. Ph. u. Ch. 13. 185—7. l., 1881).

1. *Az inductió törvénye;* ez kifejezi az egyes, zártnak tekintett vezetőkben az *indukált electromotorius erőt,* mely részben a többi vezetőkben keringő áramok intensitásának változásából, részben az áramokat vivő vezetők mozgásából és alakváltozásából és a mágnesek helyzete és mágnesezése változásából származik.

2. *A potentiál-törvény;* ez kifejezi a tekintetbe vett rendszer *ponderikus eleven erejének növekedését* mint a külső ponderomotorius erők munkája, meg az összes fellépő electrodynamikus-ponderomotorius és magnetikus-ponderomotorius erők, végre a magnetikus coërcitiv erők munkájának összegét.

3. *Az energia törvénye;* ez kifejezi, hogy a vezetőkben működő, galvani- vagy thermo-batteriából származó hydro- vagy thermo-electromotorius erők munkája meg a külső erők munkája fordíttatik:

a) a vezetőkben való melegkifejtésre;

b) a rendszer *electrokinetikus energiájának* növelésére (e mellett a mágneseket stationárius elem i áramok által helyettesítve tekintetjük);

c) a rendszer ponderikus eleven erejének növelésére;

d) a mágnesezés változásánál, a coërcitiv erők ellenállásának legyőzésére.

4. *A coërcitiv erők törvénye,* vagy még a mágnesező erők törvénye; ez kifejezi, hogy a mágnesező erők munkája egyenlő a mágnesek önmagukra való potentiálja növekedésével (avagy, a mágneseket helyettező stationárius elemi áramok electrokinetikus erélye növekedésével) meg a coërcitiv erők ellenében végezett munkával.

Jegyzet: A coërcitiv erők *positiv* munkát végeznek, midőn a mágnesezés *csökken* és megfordítva.

Abban az esetben, midőn *folyamelágazás* van jelen, minden elágazó pontra nézve áll:

5. *A folytonossag törvénye,* melynek lényegét elnevezése fejezi ki, nevezetesen, hogy az elágazópont elé fordított áramok intensitásának összege egyenlő az ezen ponttól elfordúlt áramok intensitásával.

Az 1., 2., 3., 4. és esetleg 5. alatt említett törvények egymástól nem függetlenek, hanem az energia törvénye mindig kifejezhető a többi három vagy négy egyenlet alapján. (V. ö. a 3., 4., 5. §§-okat).

2. §. *A következőkben megvizsgált három csoportja az inductió-jelenségeknek.*

Habár az electrodynamikus és az electromagnetikus inductió törvényei általánosságban érvényesek, mindazonáltal kifejezéseik külső alakja és száma külömböző jelenség-csoportokra nézve külömböző; ezért és egyenleteik tárgyalása egymástól eltérő megfontolásokat és számításokat követel.

A következőkben tárgyalt inductió-jelenségek majdnem mindig a következő typikus csoportokra vezethetők vissza:

I. Az első (I) jelenség-csoporthoz azok tartoznak, melyeknél két teljesen *elválasztott, zárt, el nem ágazott* vezető (áram) és ezen kívül tetszőleges mágnesek vannak jelen.

E mellett a két vezető egészben vagy részeikben *mozoghatóknak* tekintetnek.

II. A második (II) csoportba azon jelenségek tartoznak, melyeknél *egy zárt, el nem ágazott* vezető (áram) és ezen kívül tetszőleges mágnesek vannak jelen.

A vezető maga és egyes részei *mozoghatóknak* tekintetnek.

III. A harmadik (III) csoportot azok a jelenségek alkotják, melyeknél *egy zárt, de egyszerűen elágazott* vezető (áram) és ezen kívül tetszőleges mágnesek vannak jelen.

Itt is felvétetik, hogy a vezető maga és egyes részei *mozoghatók.*

Az első csoportból folyamelágazás útján még származtatható többi combinatiók mindig analog módon tárgyalhatók, mint a fentnevezett három typikus csoport.

Az említett három csoport mindegyikének a külömböző alakú és számú differentiál-egyenletek külön csoportja felel meg.

De ki fog tűnni, hogy a harmadik csoport differentiál-egyenleteit ugyanazon typikus alakra lehet hozni, mint az első csoportéit, ezért is ezen két csoport egyenletei majdnem mindig együttesen fognak megvizsgáltatni és csak oly részletek, melyek a két csoportra nézve lényegesen külömbözőek, külön-külön lesznek tárgyalva.

Jegyzet: Az itt vizsgált inductió-jelenségeknél mindig felveszszük, hogy minden vezető-ág egész hosszában az áramintensitás ugyanaz, azaz, hogy a felület statikai töltésének változása és maga a töltés elhanyagolható.

Ezt mindig szabad felvenni, míg a vezetők nem mutatnak felette nagy electromos ellenállást, és a sodronytekercsekben nem felette vékonyak és hosszúak.

3. §. *Jelölések. Az electrodynamikus és az electromagnetikus inductió egyenletei elválasztott két zárt áramra nézve.*

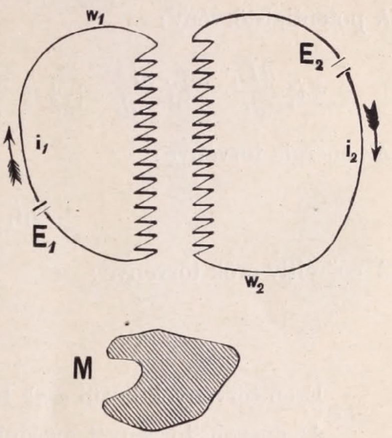
A következő vizsgálatok egész folyamában az alább felsorolt menynyiségekre nézve következetesen a következő jelölések mind végig meg fognak tartatni:

Jelelje:

t a folyó időt,

továbbá külön-külön az egyes csoportokra nézve:

I. Az első csoportnál (az I. egyenletrendszerben), *elválasztott, zárt, el nem ágazott két* vezetőnél:



1. ábra.

$\left.\begin{array}{l} L_1 \text{ az egyik} \\ L_2 \text{ a másik} \end{array}\right\}$ vezető önindúctiójának együtthatóját.

M a két vezető kölcsönös, egymásra való inductiójának együtthatóját.

$\left.\begin{array}{l} w_1 \text{ az egyik} \\ w_2 \text{ a másik} \end{array}\right\}$ vezető electromos vezetéki ellenállását.

$\left.\begin{array}{l} E_1 \text{ az egyik} \\ E_2 \text{ a másik} \end{array}\right\}$ vezetőben működő hydro- vagy thermo-electromotorius vagy a rendszeren kívül lévő okokból származó és fennálló electromotorius erőt.

$\left.\begin{array}{l} i_1 \text{ az egyik} \\ i_2 \text{ a másik} \end{array}\right\}$ vezetőben keringő electromos áram intensitását.

$\left.\begin{array}{l} J_1 = \dfrac{E_1}{w_1} \text{ az egyik} \\ J_2 = \dfrac{E_2}{w_2} \text{ a másik} \end{array}\right\}$ vezetőben keringő áram intensitásának azon értékét, mely bekövetkezik, midőn a rendszer egyes részei nem gyakorolnak egymásra indukált electromotorius erőt.

L a külső ponderomotorius erők munkáját.

T a rendszer ponderikus eleven erejét.

U a rendszerben lévő összes áramok rendszerének, beleszámítva a fellépő mágneseket helyettező elemi áramokat is, önmagára való potentiálját vagy az áramok összes electrokinetikus energiáját.

$\left.\begin{array}{l} i_1 Q_1 \text{ az egyik} \\ i_2 Q_2 \text{ a másik} \end{array}\right\}$ áram és a fellépő mágnesek rendszere kölcsönhatásának potentiálját.

$\frac{1}{2}R$ a fellépő mágnesek rendszerének illetve az azokat helyettező elemi áramok rendszerének önmagára való potentiálját.

A a coërcitiv erők ellenében végezett munkát.

Φ a mágnesező erők munkáját.

A rendszer electrokinetikus energiája:

$$U=\tfrac{1}{2}i_1^2L_1+i_1i_2M+\tfrac{1}{2}i_2^2L_2+i_1Q_1+i_2Q_2+\tfrac{1}{2}R \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Az electrodynamikus és az electromagnetikus inductió egyenletei ezen esetben, hol elválasztott két zárt áram és változó mágnesezésű mágnesek vannak jelen, a következőek:

Az inductió törvénye:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d(i_1L_1)}{dt}+\frac{d(i_2M)}{dt}+\frac{dQ_1}{dt}+w_1i_1-E_1=0\\ \frac{d(i_1M)}{dt}+\frac{d(i_2L_2)}{dt}+\frac{dQ_2}{dt}+w_2i_2-E_2=0\\ \frac{d(i_1Q_1)}{dt}+\frac{d(i_2Q_2)}{dt}+\frac{dR}{dt}=0\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

A potentiál-törvény:

$$\tfrac{1}{2}i_1^2\frac{dL_1}{dt}+i_1i_2\frac{dM}{dt}+\tfrac{1}{2}i_2^2\frac{dL_2}{dt}+i_1\frac{dQ_1}{dt}+i_2\frac{dQ_2}{dt}+\tfrac{1}{2}\frac{dR}{dt}-\frac{dA}{dt}+\frac{d(\mathfrak{L}-\mathfrak{T})}{dt}=0 \quad . \quad (3)$$

Az energia törvénye:

$$E_1i_1+Ei_2+\frac{d\mathfrak{L}}{dt}=\frac{d\mathfrak{T}}{dt}+\frac{dU}{dt}+w_1i_1^2+w_2i_2^2+\frac{dA}{dt} \quad \ldots . \quad (4)$$

A coërcitiv erők törvénye:

$$\tfrac{1}{2}\frac{dR}{dt}+\frac{dA}{dt}=\frac{d\Phi}{dt} \quad \ldots\ldots . \quad (5)$$

Ezen törvények közül csak három független egymástól.

Az energia törvényét nyerjük, ha az inductió első egyenletét i_1-el, másodikát i_2-vel szorozva a harmadik egyenlethez adjuk és ezen összegből a potentiál-törvényt levonjuk, e mellett még az U-nak (1) alatt írt értékét veszszük tekintetbe.

Észreveszszük, hogy a rendszer önindúctiójából származó indukált electromotorius erők:

$$\left.\begin{aligned}&\text{az egyik vezetőben:} && \mathfrak{E}_1=-\frac{d}{dt}\{i_1L_1+i_2M+Q_1\}=-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial i_1}\right),\\ &\text{a másik vezetőben:} && \mathfrak{E}_2=-\frac{d}{dt}\{i_1M+i_2L_2+Q_2\}=-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial i_2}\right),\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

4. §. *Jelölések. Az electrodynamikus és electromagnetikus inductió egyenletei el nem ágazott zárt áramra nézve.*

Jelelje, megegyezésben a megelőző §-ban bevezetett jelölésekkel, a *második* csoportban (a II. egyenletrendszerben), *egy* zárt áram esetében:

L a vezető önindúctiója együtthatóját.

w a vezető electromos ellenállását.

E a vezetőben működő hydro- vagy thermo-electromotorius, vagy kívülről a rendszerre ható electromotorius erőt.

i az áram intensitását a vezetőben.

$J=\frac{E}{w}$ azon áramintensitást, mely bekövetkezik, midőn a rendszer részei egymásra nem fejtenek ki kölcsönös inductiót.

L a külső ponderomotorius erők munkáját.

T a rendszer ponderikus eleven erejét.

U a rendszer electrokinetikus energiáját (vagy az áramok rendszerének önmagára való potentiálját), beleértve a mágneseket helyettező elemi áramokat.

iQ az áram és a mágnesek kölcsönhatásának potentiálját.

$\frac{1}{2}R$ a mágnesek (vagy az azokat helyettező elemi áramok) rendszerének önmagára való potentiálját.

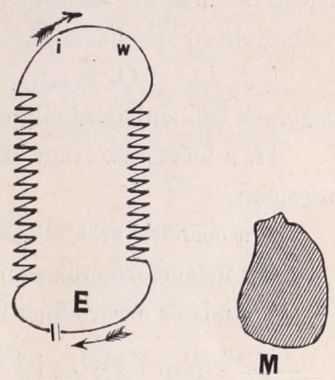
A a coërcitiv erők ellenében végezett munkát.

Φ a mágnesező erők munkáját.

A rendszer electrokinetikus energiája:

$$U=\tfrac{1}{2}i^2L+iQ+\tfrac{1}{2}R \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1$$

Az electrodynamikus és az electromagnetikus inductió egyenletei a jelen esetben:



2. ábra

Az inductió törvénye:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d(iL)}{dt}+\frac{dQ}{dt}+wi-E=0 \\ \frac{d(iQ)}{dt}+\frac{dR}{dt}=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

A potentiál-törvény:

$$\tfrac{1}{2}i^2\frac{dL}{dt}+i\frac{dQ}{dt}+\tfrac{1}{2}\frac{dR}{dt}-\frac{dA}{dt}+\frac{d(\mathrm{L}-\mathrm{T})}{dt}=0 \quad \ldots \quad (3)$$

Az energia törvénye:

$$Ei+\frac{d\mathrm{L}}{dt}=\frac{d\mathrm{T}}{dt}+\frac{dU}{dt}+wi^2+\frac{dA}{dt} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

A coërcitiv erők törvénye:

$$\tfrac{1}{2}\frac{dR}{dt}+\frac{dA}{dt}=\frac{d\Phi}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Itt is érvényes a megelőző § megjegyzése, hogy a *négy* törvény közűl csak *három* a független.

Az energia törvényét nyerjük, ha az inductió első egyenletét i-vel szorozva a másodikhoz adjuk, és az összeget a potentiál-törvényből levonva, az U-nak (1) alatt írt kifejezésére vagyunk tekintettel.

Észreveszszük, hogy az első egyenlet értelmében a rendszer önindductiója folytán a zárt vezetőben fellépő electromotorius erő:

$$\mathfrak{E}=-\frac{d}{dt}\{iL+Q\}=-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial i}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

5. §. *Jelölések. Az electrodynamikus és az electromagnetikus inductió egyenletei egyszerűen elágazott áramra nézve.*

Megegyezésben a megelőző két § jelölésével, legyen,

III A harmadik csoportban (a III egyenletrendszerben), egyszerűen elágazott áramnál:

L_{11}, L_{22}, L_{33} az egyes vezető-ágak önindnctiója együtthatóit.

L_{23}, L_{31}, L_{12} az egyes vezető-ágak kölcsönös inductiója együtthatóit.

w_1, w_2, w_3 az egyes vezető-ágak electromos ellenállását.

E_1, E_2, E_3 az egyes vezető-ágakban működő, a rendszer inductiójától független electromotorius erőket.

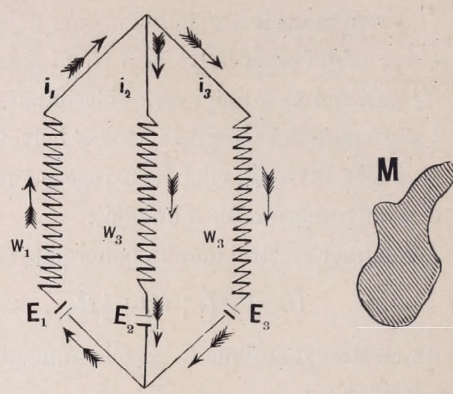
i_1, i_2, i_3 az áramok intensitásait az egyes vezető-ágakban.

J_1, J_2, J_3 a rendszer önindnctiójától független részeit az áramok intensitásának.

L a külső ponderomotorius erők munkáját.

T a rendszer ponderikus eleven erejét.

U a rendszer electrokinetikus energiáját (az áramok rendszere önmagára való potentiálját, beleértve a mágneseket helyettező elemi áramokat is).



3. ábra.

i_1Q_1, i_2Q_2, i_3Q_3 az egyes folyam-ágak és a jelenlévő mágnesek kölcsönhatásának potentiáljait.

$\frac{1}{2}R$ a mágnesek (vagy az azokat helyettező stationárius elemi áramok) rendszerének potentiálját önmagára.

A a coërcitiv erők ellenében végezett munkát.

Φ a mágnesező erők munkáját.

A rendszer electrokinetikus energiája:

$$U=\frac{1}{2}i_1^2L_{11}+\frac{1}{2}i_2^2L_{22}+\frac{1}{2}i_3^2L_{33}+i_2i_3L_{23}+i_3i_1L_{31}+i_1i_2L_{12}+i_1Q_1+i_2Q_2+i_3Q_3+\frac{1}{2}R \quad . \; . \; . \quad (1)$$

Az electrodynamikus és az electromagnetikus inductió egyenletei a jelen esetben:

Az inductió törvénye (ez megfelel a folyam-elágazás Kirchhoff-féle tételei másodikának):

$$\left.\begin{aligned} E_2+\mathfrak{E}_2-E_3-\mathfrak{E}_3&=w_2i_2-w_3i_3\\ E_3+\mathfrak{E}_3+E_1+\mathfrak{E}_1&=w_3i_3+w_1i_1\\ E_1+\mathfrak{E}_1+E_2+\mathfrak{E}_2&=w_1i_1+w_2i_2 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Itt $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_3$ jelentik a vezető egyes ágaiban maga a rendszer által indukált electromotorius erőket; értékük:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}_1&=-\frac{d}{dt}\{i_1L_{11}+i_2L_{12}+i_3L_{31}+Q_1\}=-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial i_1}\right),\\ \mathfrak{E}_2&=-\frac{d}{dt}\{i_1L_{12}+i_2L_{22}+i_3L_{23}+Q_2\}=-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial i_2}\right),\\ \mathfrak{E}_3&=-\frac{d}{dt}\{i_1L_{31}+i_2L_{23}+i_3L_{33}+Q_3\}=-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial i_3}\right), \end{aligned}\right| \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2_a)$$

Az inductió törvénye utolsó egyenlete:

$$\frac{d\,(i_1Q_1)}{dt}+\frac{d\,(i_2Q_2)}{dt}+\frac{d\,(i_3Q_3)}{dt}+\frac{dR}{dt}=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2_b)$$

A folytonosság egyenlete az elágazó pontokban (Kirchhoff *első* tétele):

$$i_1=i_2+i_3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

A potentiál-törvény itt:

$$\left.\begin{aligned}\tfrac{1}{2}i_1^2\frac{dL_{11}}{dt}+\tfrac{1}{2}i_2^2\frac{dL_{22}}{dt}+\tfrac{1}{2}i_3^2\frac{dL_{33}}{dt}+i_2i_3\frac{dL_{23}}{dt}+i_3i_1\frac{dL_{31}}{dt}+i_1i_2\frac{dL_{12}}{dt}+i_1\frac{dQ_1}{dt}+i_2\frac{dQ_2}{dt}+i_3\frac{dQ_3}{dt}&\\ +\tfrac{1}{2}\frac{dR}{dt}-\frac{dA}{dt}+\frac{d(\mathbf{L}-\mathbf{T})}{dt}=0&\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Az energia törvénye:

$$E_1i_1+E_2i_2+E_3i_3+\frac{d\mathbf{L}}{dt}=\frac{d\mathbf{T}}{dt}+\frac{dU}{dt}+w_1i_1^2+w_2i_2^2+w_3i_3^2+\frac{dA}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

A coërcitiv erők törvénye:

$$\tfrac{1}{2}\frac{dR}{dt}+\frac{dA}{dt}=\frac{d\Phi}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

A fentírt egyenletekhez a következő megjegyzéseket kapcsoljuk:

Az inductió első három egyenlete (2) közűl csak *kettő* független egymástól, mivel az egyenletek mindegyike a többi kettőből öszszegezés vagy kivonás által nyerhető. Ezenkívül itt, a megelőző két §-ban említett négy törvényen kívül még az elágazó pontokban a folytonosság egyenlete (3) lép hozzá.

Végre észreveszszük, hogy az *öt* törvény itt is csak *négy* függetlent tartalmaz. Nyerjük az energia törvényét, ha az inductió egyenletek elsejét i_2-vel, másodikát i_3-mal szorozva öszszegezzük és a nevezett folytonosság egyenlete segélyével találjuk:

$$(E_1+\mathfrak{E}_1)i_1+(E_2+\mathfrak{E}_2)i_2+(E_3+\mathfrak{E}_3)i_3=w_1i_1^2+w_2i_2^2+w_3i_3^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Ehhez adva az inductió-egyenlet utolsóját és a potentiál-törvényt belőle kivonva, származik az energia törvénye.

2. Az inductió általános egyenleteinek alkalmazása az electrodynamometer jelenségeire.

6. §. *Az electrodynamometer általános és lényeges sajátságai és czéljai.*

Electrodynamometer alatt általánosságban véve oly mérőeszközt értünk, mely közvetetlenűl két electromos áramintensitás szorzatának vagy egy áramintensitás négyzetének mérésére szolgál; ezen czélra az áramok vagy az áram electrodynamikus ponderomotorius hatása használtatik fel.

Lényegében véve az eszköz két merev alakú lineáris vezetőből vagy vezetőrészből áll, mely vagy külön-külön, önmagában zárt két vezetéket képez (I), vagy összesen *egy* folytonos zárt vezetékké van egyesítve (II), vagy egy harmadik vezetővel kapcsolatban egy egyszerűen elágazott vezetéket képez (III).

A két merev vezetőrész közűl rendesen az egyik álló, a másik mozogható.

Midőn a két vezetőn keresztűl electromos áramok vagy electromos áram halad: az annak folytán fellépő electrodynamikus-ponderomotorius erők a két merev részt egymáshoz más viszonylagos helyzetbe hozzák.

Midőn az áramok vagy az áram stationárius lett, vagy a midőn azok (vagy az), rendkívül gyorsan, de periodikusan változó áramok (vagy áram), akkor a mozgó vezető rész más *egyensúlyi* helyzetbe jutott az álló részhez viszonyítva, mint a milyennel az az áramok vagy az áram nem létezése alkalmával bír.

Ezen *új egyensúlyi helyzetből következtetést vonhatni a két áram intensitásának szorzatára, illetve az egy áram intensitásának négyzetére;* a periodikusan változó áramok vagy áram esetében a nevezett *szorzat* vagy *négyzet időbeli középértékére.*

Az electrodynamometer még igen rövid ideig tartó áramok mérésére is szolgál.

Midőn a két vezetőn átmenő áramok egyike, vagy mindkettő, az egy áram esetében pedig ez az egy áram, csak oly rövid ideig tartó, hogy tartama közben a mozogható rész helyzete észrevehetőleg nem változik, akkor mégis ezen rövid tartamú, de rendesen energikus hatás folytán a mozogható rész sebessége impulsusszerűen, lökésszerűen változott, és maga ez a rész, az áram megszűnése után, nyert sebességénél fogva, bizonyos lengésbe jő.

Ezen lengés amplitudójából az *áramok szorzatának, vagy az áram négyzetének időbeli öszszegére (integrális értékére)* vonhatunk következtetést.

Bizonyos zavaró, de meghatározható, vagy bizonyos esetekben kikerülhető befolyást gyakorolnak az electrodynamometer közelében lévő mágnesek és mindenesetre a földmágnesség.

7. §. *Az electrodynamometer általános problemájának definitiója.*

Azon része az electrodynamometer elméletének, mely az eszköz *egyensúlyi helyzetére* vonatkozik, azaz a statikai, stationárius viszonyokat tartalmazó elmélet, továbbá a rövid tartamú áramok elméletének ide tartozó része, egyszerű természetű és már teljesen ismeretes.

Ellenben, teljesen ismeretlen még jelenleg az electrodynamometer elméletének azon része, mely az eszköz mozgása állapotára vonatkozik, azaz az eszköz tulajdonképeni mechanikája.

Közelebbről pedig az electrodynamometer szigorúabb elméletének a feladatát következőleg definiáljuk:

1. *Megvizsgálása az eszköz mozogható része a valóságban végbemenő mozgásának, a mint az a külső erők, az áramok vagy az áram, esetleg még a jelen lévő mágnesek ponderomotorius erőinek hatása alatt, az electrodynamikus és esetleg az electromagnetikus inductió tekintetbe vétele mellett tényleg történik.*

2. *Meghatározása az áramok vagy az áram intensitásának, mint az idő explicit függvényének, azaz a mozgás minden időpontjára nézve.*

Ha ismerjük az eszköz mozogható részének mozgását és az áram intensitását minden vezetőrészben mint az idő explicit függvényeit, akkor ez által egyszersmind az eszköz teljes mechanikája adva van.

8. §. *Az electrodynamometer differentiál-egyenleteinek legáltalánosabb alakja állandó és homogén mágnességi térben.*

Az electrodynamometer a 6. §-ban adott általános definitiója értelmében a 3—5. §§-okban idézett egyenletek tetemesen egyszerűsbödnek, különösen, ha a mágnesek befolyását arra, a gyakorlatban majdnem mindig előforduló esetre vonatkoztatjuk, midőn az electromos áramok rendszere, azaz az eszköz maga, homogén és állandó mágnességi térben van.

1. Az eszköz *merev* vezetőrészei nem változtathatják meg *alakjokat;* ezért ezen részek *önindutió-együtthatói állandóknak* tekintendők; közelebbről pedig:

I. Az *első* csoportban, 3. §., az L_1 és L_2 együtthatók állandók, ellenben a kölcsönös inductió együtthatója, M, variabilis.

II. A *második* csoportban, 4. §., az önindutió együtthatója, L, három részből állónak tekintendő; nevezetesen:

$$L = L_{11} + 2L_{12} + L_{22} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

hol L_{11} és L_{22} az el nem ágazott vezető két merev része önindutiója együtthatóit, L_{12} ezek kölcsönös inductiója tényezőjét jelentik; ezek közül L_{11} és L_{22} állandó, ellenben L_{12} variabilis.

III. A *harmadik* csoportban, 5. §., vonatkoztassuk az $_1$ és $_2$ jelzőket az electrodynamometer mozogható és nyugvó részére, ellenben a $_3$ jelzőt oly menynyiségekre, melyek közvetetlenül nem tartoznak az eszközhöz és mozgása közben nem változnak.

E szerint az önínductió együtthatói, L_{11}, L_{22}, L_{33} állandók, míg a kölcsönös inductió L_{31} és L_{12} együtthatói általánosságban véve változók; ellenben az L_{23} együttható állandó; de a 13. §-tól kezdve, L_{31} is állandónak fog tekintetni.

2. Hátra van még azon egyszerüsbítések megállapítása, melyek onnan származnak, hogy a jelen lévő mágnesek *permanens* jellegűeknek és *homogén mágnességi tért* létesítőknek tekintetnek.

A mágnes *permánens* jellegét itt úgy tekintjük, hogy egy ilyen mágnesre kívülről ható mágnesező erő a mágnesezést ugyan változtatja, de ezen erő megszűnésével a mágnesezés ugyanaz, mint hatása megkezdése előtt.

E szerint itt a mágnesező erők munkája zérus, azaz a 3—5. §. megfelelő egyenletei szerint:

$$d\Phi = d(\tfrac{1}{2}R + A) = 0$$

vagy:

$$d(\tfrac{1}{2}R) = -dA.$$

Ebből következik még, hogy a 3., 4., 5. §§-ok I., II., III., rendszereiben az inductió utolsó egyenletei, nevezetesen:

$$\left.\begin{array}{ll} (\mathrm{I}) \; \ldots\ldots\ldots & \frac{d}{dt}\{i_1Q_1+i_2Q_2+R\}=0 \\ (\mathrm{II}) \; \ldots\ldots\ldots & \frac{d}{dt}(iQ+R)=0, \\ (\mathrm{III}) \; \ldots\ldots & \frac{d}{dt}\{i_1Q_1+i_2Q_2+i_3Q_3+R\}=0, \end{array}\right\} \; \ldots\ldots\ldots \; (2)$$

megszűnnek az inductió külön egyenleteinek lenni és csak R vagy A meghatározására szolgálnak; ezért a következőkben el is fogjuk őket hagyni.

Ezenkívül, ha a magnetikus tér *állandó*, ez azt mondja, hogy az electromos áramok hatása, csak elenyésző csekély mértékben képes a ható mágnes vagy mágnesek mágnesezési állapotát változtatni. Ily viszonyok tényleg bekövetkeznek, midőn az áramok a *földmágnesség* homogén terében vannak.

Mivel pedig eszközünkben, mozogható részén kívül valamennyi többi rész nyugvásban van, a Q_1, Q_2; Q; Q_1, Q_2, Q_3 menynyiségek közül vagy azok részei közül csak azok lesznek változók, melyek még a mozogható vezetőrésztől is függenek.

Ezek szerint a 3., 4., 5. §§-ok I., II., III. egyenletrendszereiben:

$$\left.\begin{array}{ll} (\mathrm{I}) \; \ldots\ldots & \frac{dQ_2}{dt}=0, \\ (\mathrm{II}) \; \ldots\ldots & \frac{dQ}{dt}=\frac{dQ}{dt}, \\ (\mathrm{III}) \; \ldots\ldots & \frac{dQ_2}{dt}=0=\frac{dQ_3}{dt}. \end{array}\right\} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (3)$$

A Q menynyiségnek csak a mozgó vezetőrésztől függő része variabilis.

3. Mivel az energia törvénye az inductió törvényéből, és a potentiális törvényből, az electrokinetikus energia kifejezése tekintetbe vétele mellett következik, azért is a következőkben az energia egyenletét, mint függő egyenletet, szintén el fogjuk hagyni.

Tekintetbe véve a fent 1., 2., 3. pontokban részletezett megjegyzéseket, a 3., 4., 5. §§-ok I., II., III., egyenletrendszerei következőkre redukálódnak:

$$
\text{(I)} \quad \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{aligned}
& L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{d}{dt}(i_2 M) + \frac{dQ_1}{dt} + w_1 i_1 - E_1 = 0 \\
& \frac{d}{dt}(i_1 M) + L_2 \frac{di_2}{dt} + w_2 i_2 - E_2 = 0 \\
& i_1 i_2 \frac{dM}{dt} + i_1 \frac{dQ_1}{dt} + \frac{d}{dt}(\mathrm{L} - \mathrm{T}) = 0
\end{aligned} \right.
$$

$$
\text{(II)} \quad \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{aligned}
& \frac{d}{dt}(iL) + \frac{dQ}{dt} + wi - E = 0 \\
& \tfrac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dt} + i \frac{dQ}{dt} + \frac{d}{dt}(\mathrm{L} - \mathrm{T}) = 0
\end{aligned} \right.
$$

$$
(\mathrm{III}_a) \quad \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{aligned}
& \mathfrak{E}_1 = -L_{11} \frac{di_1}{dt} - \frac{d}{dt}(i_2 L_{12}) - \frac{d}{dt}(i_3 L_{31}) - \frac{dQ_1}{dt}\,; \\
& \mathfrak{E}_2 = -\frac{d}{dt}(i_1 L_{12}) - L_{22} \frac{di_2}{dt} - L_{23} \frac{di_3}{dt}\,; \\
& \mathfrak{E}_3 = -\frac{d}{dt}(i_1 L_{31}) - L_{23} \frac{di_2}{dt} - L_{33} \frac{di_3}{dt}\,;
\end{aligned} \right.
$$

$$
\text{(III)} \quad \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{aligned}
& E_2 + \mathfrak{E}_2 - E_3 - \mathfrak{E}_3 = w_2 i_2 - w_3 i_3\,, \\
& E_3 + \mathfrak{E}_3 + E_1 + \mathfrak{E}_1 = w_3 i_3 + w_1 i_1\,, \\
& E_1 + \mathfrak{E}_1 + E_2 + \mathfrak{E}_2 = w_1 i_1 + w_2 i_2\,, \\
& i_1 = i_2 + i_3 \\
& i_3 i_1 \frac{dL_{31}}{dt} + i_1 i_2 \frac{dL_{12}}{dt} + i_1 \frac{dQ_1}{dt} + \frac{d}{dt}(\mathrm{L} - \mathrm{T}) = 0\,.
\end{aligned} \right.
$$

ELSŐ RÉSZ.

1. Egyszerüsítő felvételek és feltevések.

9. §. *Az eszköz felfüggesztett részének lehetséges mozgása.*

A megelőzőkben felírt differentiál-egyenletek rendszerét még általánosságban sem lehet discutálni, míg nincsen megmondva az, hogy az electrodynamometer mozogható része, az eszköz szerkezeténél fogva *milynemű* mozgásokat végezhet?

Erre nézve tekintetbe veendő, hogy minden electrodynamometernél, mely *szigorú* és *pontos* mérő eszköz, a mozogható merev rész bizonyos tengely körül *forgó mozgást,* többnyire pedig *lengő mozgást* végez. A mozgást ismerjük, ha a *forgás szögét* ismerjük.

Jelölje:

φ az electrodynamometer merev, mozogható részének forgás szögét.

A φ e szerint mindenkor a mozgás síkjában fekvőnek tekintendő.

A forgásszög, φ, kezdőpontja (zéruspontja) gyanánt azon scála zéruspontja szokott vétetni, mely scála a φ forgásszög mérésére szolgál.

Alig szorúl még különös bizonyításra, hogy ilynemű mozgásnál a külső ponderomotorius erők munkája L, a rendszer ponderikus eleven ereje T, az inductió együtthatói M; L; L_{12}, L_{31}, a mágnességi potentiálok Q_1; Q, Q_1 csak a φ forgásszög és differentiál-quotienseinek függvényei lehetnek.

10. §. *A vezetők ellenállására és a rendszer öninductiójától független electromotorius erőkre vonatkozó feltevések.*

A következőekben mind a három csoportban, 8. §., a fellépő vezetők ellenállását, w_1, w_2; w; w_1, w_2, w_3-at *állandók*nak tekintjük.

Ez annyit mond, hogy az áramintensitást és a vezető ellenállását a vezetők egy részében sem tekintjük oly nagynak, hogy a vezetőnek az áram által okozott melegedése az ellenállást észrevehetőleg megváltoztathassa.

A rendszer öninductiójától független külső electromotorius erők, E_1, E_2; E; E_1, E_2, E_3 a következőkben az *idő ismert, adott* függvényeinek tekintendők.

Ezek hydro- vagy thermo-electromos eredetűek lehetnek; de származhatnak még valamely más, külső és olynemű rendszer inductiójából, mely rendszer a jelenleg tekintetbe vett rendszerünkre (az electrodynamometerre) nem fejthet ki inductiós hatást.

Így például, midőn az eszköztől nagyobb távolságban elhelyezett sodrony-tekercsben egy permánens mágnes állandó sebességgel forog, és ez által a tekercsben egy periodikus electromotorius erőt indukál. Ha a távolság tetemes, és az eszköz a tekercscsel nincs kapcsolatban, akkor a két rendszer egyáltalában nem hat egymásra; de ha a tekercset vezető sodronyok segítségével, az eszközzel egybekapcsoljuk, akkor ez által az eszköz megfelelő vezető részében egy unduláló electromotorius erő lesz bevezetve, mely az eszközben történő inductiótól független (de a vezetők ellenállása változást szenved).

Ugyanaz áll, midőn az eszközt egy tetemes távolságban lévő földinductorral, vagy egyéb, működésben lévő inductiós-készülékkel, egy dynamogéppel s í. t. hozzuk kapcsolatba.

11. §. *A mozogható rész kitérése és szögsebessége igen kicsiny.*

Midőn az electrodynamometerrel szigorú méréseket kivánunk eszközölni, akkor vagy úgy rendezzük el a mérés körülményeit, hogy az eszköz mozgó része a hatás közben ne mutasson kitérést, azaz alkalmazzuk azt differentiál-eszköz gyanánt, vagy pedig mérjük a hatás következtében beálló kitérést.

Az első esetben elegendő oly eszközt alkalmazni, mely csak csekély kitérést enged meg, a második esetben, a kitérés pontos mérésére mindenesetre scála, tükör és leolvasó távcső segélyével eszközöltetik; ezen czélra is csak kisebb kitérések alkalmaztatnak.

Ezek értelmében czéljainknak teljesen megfelelünk, ha a mozgó rész kezdőhelyzetétől vagy eredeti egyensúlyi helyzetétől számított *forgásszögét, φ-t, az egység ellenében csekély értékűnek tekintjük.*

Kapcsolatban evvel, a következő megjegyzés áll: A véges kicsiny φ szög leirására mindig *véges* időtartam szükséges; ezért is a $\frac{d\varphi}{dt}$ *szögsebességet a szögsebesség egységéhez képest csekélynek tekintjük.*

2. Az electrodynamometer általános egyenleteinek felállítása.

12. §. *A rendszer ponderikus eleven ereje és a külső erők ponderikus munkájának szigorú kifejezései.*

Az eszköz forogható része az egyedüli ponderikus tömeg, mely mozgással bír. Mivel ez a mozgás forgó, a rendszer eleven ereje lesz, ha K forgó részének tehetetlenségi nyomatéka:

$$\mathrm{T}=\tfrac{1}{2}K\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

A T-nek az idő szerint képezett differentiál-quotiense:

$$\frac{d\mathrm{T}}{dt}=K\frac{d^2\varphi}{dt^2}\frac{d\varphi}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

A mi a külső ponderomotorius erők munkáját L-et, illeti, ezekre nézve megjegyzendő, hogy ezek *közönséges,* mechanikai erők, melyek három csoportra oszthatók; nevezetesen:

α) A föld nehézségi vonzásából származó erő, mely mindig végez munkát, midőn a mozgó rész két fonálon van felfüggesztve, vagy midőn a mozgó rész forgása akképen történik, hogy e közben a mozgó rész tömegközéppontjának a magassága változik.

Ezen erő által a mozgó részre gyakorolt és a forgás síkjában fekvő *forgásnyomaték* mindenesetre írható a következő sor szerint:

$$\mathrm{F}_\alpha=-b_{\alpha,1}(\varphi-\sigma)-\tfrac{1}{2}b_{\alpha,2}(\varphi-\sigma)^2-\tfrac{1}{2.3}b_{\alpha,3}(\varphi-\sigma)^3-\ldots \ldots \quad (3)$$

Ezen kifejezésben σ jelenti a forgásszögnek azon meghatározott értékét, a melynél az F_α értéke zérus, azaz, a melynél, ha csak a föld nehézségi ereje működnék reá, a mozgó rész nyugvásban maradna.

A $b_{\alpha,1}$, $b_{\alpha,2}$, $b_{\alpha,3}$, .. együtthatók, a felfüggesztés vagy a forgás speciális módozatai tekintetbe vételével határozódnak meg.

Az $\mathbf{F}_\alpha$ forgásnyomaték törekvése, a mozgó részt a $\varphi=\sigma$ helyzetbe *vissza*vezetni, azaz a $(\varphi-\sigma)$ változó szöget, absolut értékére nézve kisebbíteni; ezért is az $\mathbf{F}_\alpha$ absolute negativ leszen.

A σ szög a φ szöggel egyenrendű menynyiség, mely azonban rendesen sokkal kisebb, mint a φ középértéke. Ezen $\mathbf{F}_\alpha$ forgásnyomaték a dt időelem közben végzi a következő elemi munkát:

$$\frac{d\mathrm{L}_\alpha}{dt}dt=\mathbf{F}_\alpha\, d\varphi=-\left[b_{\alpha,1}(\varphi-\sigma)+\tfrac{1}{2}b_{\alpha,2}(\varphi-\sigma)^2+\tfrac{1}{2.3}b_{\alpha,3}(\varphi-\sigma)^3+\dots\right]\frac{d\varphi}{dt}dt \quad . \; . \; . \; . \quad (4)$$

β) A felfüggesztő sodronyok vagy a forgásnál igénybe vett egyéb rugalmas részek rugalmasságából származó erők, melyek minden forgásnál keletkeznek és munkát végeznek.

Itt is írjuk az ezekből származó forgásnyomatékot:

$$\mathbf{F}_\beta=-b_{\beta,1}(\varphi-\rho)-\tfrac{1}{2}b_{\beta,2}(\varphi-\rho)^2-\tfrac{1}{2.3}(\varphi-\rho)^3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Itt, megfelelőleg az a) alatt tett megjegyzésnek: ρ jelenti a φ szögnek azon értéket, melynél a rugalmassági erők forgásnyomatékot nem gyakorolnak; a $b_{\beta,1}$, $b_{\beta,2}$, $b_{\beta,3}$, .. együtthatók, a felfüggesztő sodronyok és fonalak méretei, természete, elrendezésétől s í. t. függenek.

Ezen forgásnyomatéknak is az a törekvése, a $(\varphi-\rho)$ szög absolut értékét kisebbíteni, és ezért is $\mathbf{F}_\beta$ absolute negativ értékű lesz.

A ρ szög rendesen φ-vel egyenrendű, de legtöbbnyire sokkal kisebb, mint a φ középértéke.

A dt időelem alatt ez a forgásnyomaték következő munkát végez:

$$\frac{d\mathrm{L}_\beta}{dt}dt=\mathbf{F}_\beta\, d\varphi=-\left[b_{\beta,1}(\varphi-\rho)+\tfrac{1}{2}b_{\beta,2}(\varphi-\rho)^2+\tfrac{1}{2.3}b_{\beta,3}(\varphi-\rho)^3+\dots\right]\frac{d\varphi}{dt}dt \quad . \; . \; . \; . \quad (6)$$

γ) Az eszköz mozgó részét környező levegő surlódása és ellenállása, valamint a felfüggesztő sodronyok és fonalak tökéletlen rugalmassága folytán származó erők.

Ezeket egy szóval *surlódás*beli erőknek nevezzük; a tapasztalat szerint ezek a mozgás *sebességétől* függenek, és általánosságban véve a mozgás irányával ellentett irányban működnek.

A forgásnyomatékot, a mely ezen erőkből származik, mindenesetre a sebesség növekedő hatványai szerint haladó sorba fejtve szabad írnunk; ez lesz:

$$\mathbf{F}_\gamma=-b_{\gamma,1}\frac{d\varphi}{dt}-\tfrac{1}{2}b_{\gamma,2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2-\tfrac{1}{2.3}b_{\gamma,3}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^3- \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Ezen erők természete szerint a forgásnyomaték zérus lesz, ha a sebesség zérus.

Az egyes $b_{\gamma,1}$, $b_{\gamma,2}$, $b_{\gamma,3}$, .. együtthatók empirikusan határoztatnak meg.

Ez a forgásnyomaték dt időelem alatt következő elemi munkát végez:

$$\frac{d\mathrm{L}_\gamma}{dt}dt=\mathbf{F}_\gamma\, d\varphi=-\left[b_{\gamma,1}\frac{d\varphi}{dt}+\tfrac{1}{2}b_{\gamma,2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+\tfrac{1}{2.3}b_{\gamma,3}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^3+\dots\right]\frac{d\varphi}{dt}dt \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

$\alpha+\beta+\gamma$). Összefoglalva az α), β), γ) alatt mondottakat, lesz:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathrm{L}}{dt}=\frac{d}{dt}(\mathrm{L}_\alpha+\mathrm{L}_\beta+\mathrm{L}_\gamma)=&-\left\{b_{\alpha,1}(\varphi-\sigma)+b_{\beta,1}(\varphi-\rho)+b_{\gamma,1}\frac{d\varphi}{dt}\right\}\frac{d\varphi}{dt}\\ &-\tfrac{1}{2}\left\{b_{\alpha,2}(\varphi-\sigma)^2+b_{\beta,2}(\varphi-\rho)^2+b_{\gamma,2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\}\frac{d\varphi}{dt}\\ &-\tfrac{1}{2.3}\left\{b_{\alpha,3}(\varphi-\sigma)^3+b_{\beta,3}(\varphi-\rho)^2+b_{\gamma,3}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^3\right\}\frac{d\varphi}{dt}\\ &\quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .\end{aligned}$$

Az *egy* zárójelben lévő menynyiségek *egyenlő* rendűek; minden $\{\}$ zárójelben levő tag a következő ily tagnál egy renddel magasabb.

Ezen együtthatók könnyebb kezelhetősége czéljából, következő rövidítéseket vezetjük be:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{K}\,b_{\gamma,1}&=\varkappa^2\\
\frac{1}{K}\{b_{\alpha,1}+b_{\beta,1}-(\sigma b_{\alpha,2}+\rho b_{\beta,2})+\tfrac{1}{2}(\sigma^2 b_{\alpha,3}+\rho^2 b_{\beta,3})-....\}&=\lambda^2\\
\frac{1}{K}\{\sigma b_{\alpha,1}+\rho b_{\beta,1}-\tfrac{1}{2}(\sigma^2 b_{\alpha,2}+\rho^2 b_{\beta,2})+\tfrac{1}{2.3}(\sigma^3 b_{\alpha,3}+\rho^3 b_{\beta,3})-....\}&=\vartheta\lambda^2\\
\frac{1}{K}\{b_{\alpha,2}+b_{\beta,2}-(\sigma b_{\alpha,3}+\rho b_{\beta,3})+....\}&=a_2\\
\frac{1}{K}\,b_{\gamma,2}&=b_2\\
\frac{1}{K}\{b_{\alpha,3}+b_{\beta,3}-(\sigma b_{\alpha,4}+....\}&=a_3\\
\frac{1}{K}\,b_{\gamma,3}&=b_3\\
.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.&
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

E szerint lesz:

$$\frac{d\mathrm{L}}{dt}=-K\frac{d\varphi}{dt}\left\{\lambda^2(\varphi-\vartheta)+\varkappa^2\frac{d\varphi}{dt}+\tfrac{1}{2}a_2\varphi^2+\tfrac{1}{2}b_2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+\tfrac{1}{2.3}a_3\varphi^3+\tfrac{1}{2.3}b_3\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^3+....\right\} \quad . \; . \quad (10)$$

13. §. *Az inductió együtthatóinak, M és L_{12}-nek explicit kifejezései; feltevés: L_{31} = Constans.*

Egy meghatározott eszközre nézve a nyugvó és a mozgó vezető rész kölcsönös inductiója együtthatója M, L_{12}, L_{12}, a szerint, a mint a kapcsolás az I., II., III. csoportnak felel meg, 2. §.; e szerint ez a három betű csak egy és ugyanazon menynyiséget jelent, úgy hogy elegendő csak egyiköket megvizsgálni.

Az a körülmény, vajjon az eszköz két része önmagokban zárt két vezetőt vagy csak egyet, vagy csak vezetőágakat képeznek, az L_{12} értékére nincs befolyással.

Ezen L_{12} menynyiséget, miként önként következik, sorba fejthetőnek tekintjük; τ jelenti a φ-nek azon értékét, melynél az $M=L_{12}$ együttható $M=L_{12_\tau}$-val jelöltetik; ezen értékből kiindulólag számítjuk az $L_{12}=M$ menynyiség változó értékét.

Írjuk:

$$\left(\frac{\partial L_{12}}{\partial\varphi}\right)_\tau=A,\;\left(\frac{\partial^2 L_{12}}{\partial\varphi^2}\right)_\tau=B,\;\left(\frac{\partial^3 L_{12}}{\partial\varphi^3}\right)_\tau=C,\;\left(\frac{\partial^4 L_{12}}{\partial\varphi^4}\right)_\tau=D,\;.....,$$

lesz:

$$M=L_{12}=L_{12(\varphi-\tau)}=L_{12_\tau}+A(\varphi-\tau)+\tfrac{1}{2}B(\varphi-\tau)^2+\tfrac{1}{2.3}C(\varphi-\tau)^3+ \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

A II. csoportban L lép fel, melynek értéke a 8. §. szerint:

A τ-ra vonatkozó érték:

$$\left.\begin{aligned}
L&=L_{11}+2L_{12}+L_{22}\\
L_\tau&=L_{11}+2L_{12_\tau}+L_{22}
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

A τ szög mindig úgy választható, hogy értéke sokkal kisebb, mint a φ középértéke.

A következőkben L_{12}-őt a φ növekedő hatványai szerint haladó sorba fejtjük ki, és rövidség kedvéért írjuk:

$$\left.\begin{array}{l} M_\tau - A\tau + \frac{1}{2}B\tau^2 - \frac{1}{2.3}C\tau^3 + \ldots = M_0 = L_{12_0} \\ \frac{1}{K}\{A - B\tau + \frac{1}{2}C\tau^2 - \ldots\} = \eta_1 , \\ \frac{1}{K}\{B - C\tau + \frac{1}{3}D\tau^2 - \ldots\} = \eta_2 , \\ \frac{1}{K}\{C - D\tau + \frac{1}{4}E\tau^2 - \ldots\} = \eta_3 , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Továbbá az L_{12} változó része számára:

$$K\{\eta_1\varphi + \tfrac{1}{2}\eta_2\varphi^2 + \tfrac{1}{2.3}\eta_3\varphi^3 + \ldots\} = \omega, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

ezeken kívül:

$$\left.\begin{array}{r} \frac{1}{K} = a_1 \\ L_{11} + 2L_{12_0} + L_{22} = L_0 , \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Ezekből ered:

$$\left.\begin{array}{r} M = L_{12} = M_0 + \omega \\ L = L_0 + 2\omega \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Az A, B, C, D, E differential-quotiensek értéke az eszköz két része alakjától, viszonylagos helyzetétől és azok relativ mozgásától függ.

Az L_{31} inductió-együtthatóra nézve, 5. és 8. §§., egyszerüsitést fogunk bevezetni, nevezetesen, hogy a w_3 vezetőág oly helyzetben és oly elrendezésben legyen, hogy az eszköz forogható részének mozgása által az L_{31} csak észrevehetetlen módon változzék.

Ily elrendezés a III. csoportnak, 5. §., alkalmazásánál majdnem mindig önként adódik és mindenesetre az eszközlendő mérés egyszerüsitésére szolgál.

E szerint L_{31} *állandó*-nak tekintendő, miből következik, hogy a 8. §. (III) egyenletrendszer némiképen egyszerűsbödik.

14. §. *A Q_1, Q, Q_1 pontentiálok explicit kifejezései homogén és állandó mágnességi térben.*

Az eszköz mozogható részében ömlő, az intensitás egységével biró áram és a jelenlévő mágnesek kölcsönhatásának potentiálja a 8. §. I., II., III. csoportjaiban Q_1, Q, Q_1-el jeleltettek; e szerint ezek a betűk *egy* és ugyanazon menynyiséget jelentenek és ezentúl a közös Q betű által lesznek képviselve.

Bármily alakú legyen is a mozogható rész, mivel a forgásszög φ nagyon kicsiny, a Q-t lehet a φ növekvő hatványai szerint haladó sorba fejteni:

$$Q = Q_0 + K\{\xi_1\varphi + \tfrac{1}{2}\xi_2\varphi^2 + \tfrac{1}{2.3}\varphi^3 + \ldots\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

A ξ_1, ξ_2, $\xi_3 \ldots$ együtthatók következőképen határozódnak meg:

Legyen:

$\mathfrak{F}$ az eszköz forogható része vezetője által körülvett terület.

$\mathfrak{H}$ a mágnességi térnek a forgás síkjában fekvő erőösszetevője (a tér intensitásának compenense).

ψ a forogható rész menetsíkjának normálisa és a $\mathfrak{H}$ iránya között lévő szög.

ψ_0 a használt skála zéruspontja és $\mathfrak{H}$ iránya között lévő szög.

φ a forgásszög, mint a 9. §-ban.

Ekkor származik:

$$\left.\begin{aligned} \psi &= \psi_0 + \varphi\,, \\ Q &= -\mathfrak{F}\mathfrak{H}\cos(\psi_0+\varphi)\,, \\ \frac{dQ}{dt} &= +\mathfrak{F}\mathfrak{H}\sin(\psi_0+\varphi)\frac{d\varphi}{dt}\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Továbbá áll:

$$-\cos(\psi_0+\varphi) = -\cos\psi_0\cos\varphi + \sin\psi_0\sin\varphi\,,$$

Ezenkívül, mivel φ kicsiny:

$$\cos\varphi = 1 - \tfrac{1}{2}\varphi^2 + \ldots,\ \sin\varphi = \varphi - \tfrac{1}{2.3}\varphi^3 + \ldots,$$

miből:

$$-\cos(\psi_0+\varphi) = -\cos\psi_0 + \varphi\sin\psi_0 + \tfrac{1}{2}\varphi^2\cos\psi_0 - \tfrac{1}{2.3}\varphi^3\sin\psi_0 - \ldots;$$

E szerint:

$$Q = -\mathfrak{F}\mathfrak{H}(\cos\psi_0 - \varphi\sin\psi_0 - \tfrac{1}{2}\varphi^2\cos\psi_0 + \tfrac{1}{2.3}\varphi^3\sin\psi_0 + \ldots) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Összehasonlítva ezen kifejezést az (1) alatt írt egyenlettel, ered:

$$\left.\begin{aligned} Q_0 &= -\mathfrak{F}\mathfrak{H}\cos\psi_0 \\ \xi_1 &= +\frac{\mathfrak{F}\mathfrak{H}}{K}\sin\psi_0 \\ \xi_2 &= +\frac{\mathfrak{F}\mathfrak{H}}{K}\cos\psi_0 \\ \xi_3 &= -\xi_1\,,\ \xi_5 = -\xi_3\,, \ldots, \\ \xi_4 &= -\xi_2\,,\ \xi_6 = -\xi_4\,, \ldots, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

15. §. *Az electrodynamometer általános egyenletrendszerei homogén mágnességi térben.*

Helyettezve a 12., 13., 14. §§-okban megállapított, φ-től függő értékeit a $\mathbf{T}$, M, L, $\mathbf{L}$, Q mennyiségeknek a 8. §. egyenletrendszereibe, és rövidítve a potentiál-törvény egyenletét $K\dfrac{d\varphi}{dt}$-vel, nyerjük a következő egyenleteket:

I. Az (I) egyenletrendszerből:

$$L_1\frac{di_1}{dt} + M_0\frac{di_2}{dt} + w_1 i_1 + K\frac{d}{dt}\{i_1(\eta_1\varphi + \tfrac{1}{2}\eta_2\varphi^2 + \ldots)\} + K\frac{d}{dt}\{\xi_1\varphi + \tfrac{1}{2}\xi_2\varphi^2 + \ldots\} - E_1 = 0$$

$$M_0\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt} + w_2 i_2 + K\frac{d}{dt}\{i_1(\eta_1\varphi + \tfrac{1}{2}\eta_2\varphi^2 + \ldots)\} - E_2 = 0$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \varkappa^2\frac{d\varphi}{dt} + \lambda^2(\varphi - \vartheta) - i_1 i_2(\eta_1 + \eta_2\varphi + \tfrac{1}{2}\eta_3\varphi^2 + \tfrac{1}{2.3}\eta_4\varphi^3 + \ldots) +$$
$$+ \tfrac{1}{2}a_2\varphi^2 + \tfrac{1}{2}b_2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2.3}a_3\varphi^3 + \tfrac{1}{2.3}b_3\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^3 + \ldots - i_1(\xi_1 + \xi_2\varphi + \tfrac{1}{2}\xi_3\varphi^2 + \tfrac{1}{2.3}\xi_4\varphi^3 + \ldots) = 0.$$

II. A (II) egyenletrendszerből:

$$L_0\frac{di}{dt} + wi + K\frac{d}{dt}\{i(\eta_1\varphi + \tfrac{1}{2}\eta_2\varphi^2 + \ldots)\} + K\frac{d}{dt}\{\xi_1\varphi + \tfrac{1}{2}\xi_2\varphi^2 + \ldots\} - E = 0,$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \varkappa^2\frac{d\varphi}{dt} + \lambda^2(\varphi - \vartheta) - i^2(\eta_1 + \eta_2\varphi + \tfrac{1}{2}\eta_3\varphi^2 + \ldots) + \tfrac{1}{2}a_2\varphi^2 + \tfrac{1}{2}b_2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2.3}a_3\varphi^3 + \tfrac{1}{2.3}b_3\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^3 + \ldots$$
$$- i(\xi_1 + \xi_2\varphi + \tfrac{1}{2}\xi_3\varphi^2 + \ldots) = 0.$$

III. A (III) egyenletrendszerből:

$$\mathfrak{E}_1 = -L_{11}\frac{di_1}{dt} - M_0\frac{di_2}{dt} - L_{31}\frac{di_3}{dt} - K\frac{d}{dt}\{i_2(\eta_1\varphi + \tfrac{1}{2}\eta_2\varphi^2 + \ldots)\} - K\frac{d}{dt}\{\xi_1\varphi + \tfrac{1}{2}\xi_2\varphi^2 + \ldots\},$$

$$\mathfrak{E}_2 = -M_0\frac{di_1}{dt} - L_{22}\frac{di_2}{dt} - L_{23}\frac{dt_3}{di} - K\frac{d}{dt}\{i_1(\eta_1\varphi + \tfrac{1}{2}\eta_2\varphi^2 + \ldots)\},$$

$$\mathfrak{E}_3 = -L_{31}\frac{di_1}{dt} - L_{23}\frac{di_2}{dt} - L_{33}\frac{di_3}{dt}.$$

$$E_2 + \mathfrak{E}_2 - E_3 - \mathfrak{E}_3 = w_2 i_2 - w_3 i_3,$$

$$E_3 + \mathfrak{E}_3 + E_1 + \mathfrak{E}_1 = w_3 i_3 + w_1 i_1,$$

$$E_1 + \mathfrak{E}_1 + E_2 + \mathfrak{E}_2 = w_1 i_1 + w_2 i_2.$$

$$i_1 = i_2 + i_3$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \varkappa^2\frac{d\varphi}{dt} + \lambda^2(\varphi - \vartheta) - i_1 i_2(\eta_1 + \eta_2\varphi + \tfrac{1}{2}\eta_3\varphi^2 + \ldots) + \tfrac{1}{2}a_2\varphi^2 + \tfrac{1}{2}b_2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2\cdot 3}a_3\varphi^3 + \tfrac{1}{2\cdot 3}b_3\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^3 + \ldots$$
$$- i_1(\xi_1 + \xi_2\varphi + \tfrac{1}{2}\xi_3\varphi^2 + \ldots) = 0.$$

A III. rendszer első három egyenlete közűl csak kettő független egymástól; válaszszuk mint ilyet az első kettőt; küszöböljük ki azokból a negyedik egyenlet segélyével i_3-at és írjuk őket explicite, de előbb a másodikat és azután az elsőt; származik belőlök:

$$(L_{11} + 2L_{31} + L_{33})\frac{di_1}{dt} + (M_0 - L_{31} - L_{33} + L_{23})\frac{di_2}{dt} + (w_1 + w_3)i_1 - w_3 i_2 + K\frac{d}{dt}\{i_2(\eta_1\varphi + \tfrac{1}{2}\eta_2\varphi^2 + \ldots)\} +$$
$$+ K\frac{d}{dt}\{\xi_1\varphi + \tfrac{1}{2}\xi_2\varphi^2 + \ldots\} - E_1 - E_3 = 0$$

$$(M_0 - L_{31} - L_{33} + L_{23})\frac{di_1}{dt} + (L_{22} - 2L_{23} + L_{33})\frac{di_2}{dt} - w_3 i_1 + (w_2 + w_3)i_2 + K\frac{d}{dt}\{i_1(\eta_1\varphi + \tfrac{1}{2}\eta_2\varphi^2 + \ldots)\} -$$
$$- E_2 + E_3 = 0$$

Ezen egyenletekhez még a III. rendszer utolsó egyenlete járul.

Azonnal észreveszszük, hogy a III. rendszer az I. rendszertől csak az által különbözik, hogy a III. rendszer első egyenletében egy i_2 szerint, második egyenletében egy i_1 szerint lineár taggal több van jelen, mint az I. rendszer megfelelő egyenleteiben.

Ez a körülmény azon oknál fogva fontos, mivel mutatja, hogy a III. rendszer megoldása egyszersmind az I. rendszer megoldását tartalmazza; erre vissza fogunk térni a 20—23. §§-okban.

A felírt egyenletrendszerekben csak az áramintensitások és az eltérések az idő függvényei, a többi menynyiségek állandók.

Továbbá, az áramintensitások egyenletei *első*rendűek és másodfokúak, ellenben az eltérések egyenletei *másod*rendűek és magasabb fokúak.

Önként világos, hogy az *integrátió egymástól független állandóinak száma* az I. és III. rendszerben *négy*, a II. rendszerben ellenben *három* leszen.

Ezek az állandók egyébként a tekintetbe vett rendszerek jelenségeinek úgynevezett *kezdő*állapotából határozódnak meg.

Csak az szükséges, hogy egy bizonyos időpontra nézve (melynek azonban nem kell az időszámítás kezdőpontjának lennie), az áramintensitások, a kitérés és a szögsebesség értékei ismeretesek legyenek, hogy ezen adatokból a nevezett állandókat lehessen meghatározni.

3. Az electrodynamometer egyenleteiben fellépő tagok értékrendje. A mozogható rész symmetriája.

16. §. *Általános megjegyzések. A* $\frac{d}{dt}(Ki\frac{1}{n!}\eta_n\varphi^n)$ *alakú tagok rendje.*

Mielőtt a felírt egyenletek közelítő megoldásával foglalkoznánk, okvetetlenül meg kell állapítanunk a bennök fellépő tagok értékeinek az egységhez vagy a φ kitéréshez való *rendjét.*

Az erre vonatkozó megfontolást a legnagyobb pontossággal kell vezetni, mert a tagok értékének a rendjétől kizárólagosan fognak függeni azok az elhanyagolások, a melyek megengedhetők, a szerint, a mint az egyenletrendszert az *első*, a *második* vagy a *harmadik* s í. t. megközelítésben kivánjuk érvényesnek tekinteni és e szerint megoldani.

Az itt fellépő *intensitások*, a 10. §. értelmében olyanok legyenek, hogy azok, még akkor is, midőn stationáriusak lettek, csak *csekély* állandó φ kitérést létesítsenek, evvel egyszersmind az is ki van mondva, hogy a jelenlétöknél fogva a vezetőkben keletkező hőkifejtések nem képesek érezhető módon a vezetők méreteit, a felfüggesztő sodronyok rugalmasságát s í. t. változtatni.

A mi illeti a $\frac{d}{dt}(Ki\frac{1}{n!}\eta_n\varphi^n)$ szerkezetű tagokat, ezekre nézve megjegyzendő, hogy az $\eta_n K$ szorzatok egyenlők a $\left(\frac{\partial^n M_0}{\partial\varphi^n}\right)_\tau$ differential-quotiensek értékeivel; de ezek L_0 és M_0-al egyrendűek. (V. ö. a 13. §-t.)

Mivel ezenkívül az L és M együtthatók, természetöknél fogva, nem szakadók, nevezett quotienseik sem lehetnek igen sokszorta nagyobbak, hanem rendesen sokkal kisebbek lesznek, mint M_0 és L_0.

Ebből folyik, hogy általánosságban az $\eta_n K\frac{1}{n!}\varphi^n$ tagok értékrendje n-szer magasabb, mint az M_0 és az L_0-é; e szerint szabad mondanunk:

A 15. §. (I), (II), (III) egyenleteiben a

$$\frac{d}{dt}(Ki\frac{1}{n!}\eta_n\varphi^n)$$

szerkezetű tagok legalább n-szer magasabb rendűek, mint az azok mellett fellépő

$$M_0\frac{di}{dt},\quad L\frac{di}{dt} \text{ tagok.}$$

Jegyzet. A gyakorlatban a τ sokszor azon értékét a φ-nek jelenti, 13. §. (1) egyenlete, melynél a kölcsönös inductió együtthatója, M_τ vagy L_{12_τ} zérus. Ekkor az M_0 és L_{12_0} rendje egygyel magasabb lesz. (V. ö. a 13. § [3] egyenletét.)

Ha M_τ vagy L_{12_τ} ezenkívül még φ-re nézve *minimum*, akkor ezen mennyiségeknek φ szerint képezett első differentiál-quotiense, nevezetesen A is zérus; akkor M_0 és L_{12_0} rendje kettővel magasabb lesz, az η_1-é egygyel.

Ez bekövetkezik, midőn az eszköz koncentrikus két tekercsből áll és τ azon helyzetre vonatkozik, melyben menet-síkjaik egymásra merőlegesek.

17. §. *A* $\varkappa^2, \lambda^2, \lambda^2\vartheta$, $\frac{1}{n!}a_n\varphi^n$, $\frac{1}{n!}b_n\varphi^n$ *együtthatók és tagok rendje.*

A környező közeg ellenállásából és surlódásából származó $\varkappa^2$ tényező, 12. §. (9), a tapasztalat szerint az egység ellenében igen csekély és még aránylag tetemes csillapításnál is mérsékelt értékű marad.

A λ^2 együttható, 12. §. (9), általánosságban véve véges és az egységgel egyenlő rendű; ellenben ϑ, természete szerint (u. o.) a φ-vel egyenrendű, de rendesen, a mint ez a ρ és σ jelentőségéből folyik, sokkal kisebb, mint a φ középértéke. E szerint $\lambda^2\varphi$ és $\lambda^2\vartheta$ a φ-vel egyenrendűek.

Továbbá, a 12. §-ban említett együtthatók: $b_{\alpha,2}, b_{\alpha,3}, \ldots, b_{\beta,2}, b_{\beta,3} \ldots, b_{\gamma,2}, b_{\gamma,3}, \ldots$ a tapasztalat szerint ugyanazon rendűek, mint a megfelelő első együtthatók $b_{\alpha,1}, b_{\beta,1}, b_{\gamma,1}$, de rendesen sokkal kisebb értékűek; ha még a $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$ sebesség magaviseletét tekintjük, 11. §., szabad mondanunk:

Az $\frac{1}{n!}a_n\varphi^n$ és $\frac{1}{n!}b_n\varphi^n$ tagok a φ^n-nel egyenlő rendűek.

18. §. *Az* $ii\frac{1}{(n-1)!}\eta_n\varphi^{n-1}$, $\frac{d}{dt}(K\frac{1}{n!}\xi_n\varphi^n)$, $i\frac{1}{(n-1)!}\xi_n\varphi^{n-1}$ *tagok rendje.*

Az utolsóelőtti §-ban megjegyeztük, hogy η_n az egységgel egyrendű.

Hogy az áramintensitás négyzetével arányos tagok rendjét lehessen megállapitani, tekintsük azt az esetet, midőn a mágnességi tér intensitása zérus, az áramintensitások stationáriusak lettek és egyensúly következett be.

Ha ekkor a 15. §. három rendszere utolsó egyenleteiben az $\frac{1}{2}a_2\varphi^2$, $\frac{1}{2}b_2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ s í. t. tagokat elhagyjuk és az ii-vel szorzott tagoknak csak a legnagyobbikát tartjuk meg, akkor marad:

$$\lambda^2(\varphi-\vartheta)=ii\eta_1 .$$

Mivel pedig a megelőző §. szerint a $\lambda^2\varphi$ és $\varkappa^2\vartheta$ szorzatok a φ-vel egyenrendűek, úgy annak kell állania az $ii\eta_1$-ra nézve is.

Ebből azonnal ered: Az $ii\frac{1}{(n-1)!}\eta_n\varphi^{n-1}$ tagok a φ^n-nel egyenrendűek.

A tagok második csoportja rendjének megállapitása czéljából jegyezzük meg, hogy az eszköz mozogható részében lévő áram és az állandó mágnességi tért létesítő mágnesek kölcsönhatásának potentiálja, nevezetesen az iQ szorzat, egyenrendű az electrodynamikus potentiállal, melynek általános kifejezése: $\frac{1}{2}i_1^2L_1+i_1i_2M+\frac{1}{2}i_2^2L_2$.

Ámde, a Q *variabilis* része, 14. §. (3), a φ-vel egyenrendű menynyiség, épen úgy, mint az M, L, L_{12} változó része.

Tekintve végre még a 14. §. (4) egyenletében adott értékeit a ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4-nek s i. t., lesz:

A $\frac{d}{dt}K\left(\frac{1}{n!}\xi_n\varphi^n\right)$ szerkezetű tagok általánosságban n-szer magasabb rendűek, mint a mellettök fellépő, $M_0\frac{di}{dt}$, $L\frac{di}{dt}$ alakú tagok.

Végre, a mi a tagok utolsó csoportjának rendjét illeti, erre nézve ismét induljunk ki azon esetből, hogy az áramok stationáriusak lettek és az eszköz egyensúlyban van. Ekkor a 15. §. három rendszerének utolsó egyenletéből lesz, ha csak a legalsóbb rendű tagokat tartjuk meg:

$$\lambda^2(\varphi-\vartheta)=ii\eta_1-i\xi_1 .$$

Az egyenlet bal oldala, továbbá, mint már fent találtuk, jobb oldalának első tagja a φ-vel egyenrendű; ha még tekintetbe veszszük a ξ_n-nek fent említett rendjét, mondhatjuk:

Az $i\frac{1}{(n-1)!}\cdot\xi_n\varphi^{n-1}$ tagok a φ^n-nel egyenrendűek.

19. §. *Az electrodynamometer symmetrikus szerkezete. Befolyása néhány tag értékére.*

A következőkben *symmetrikusan* szerkezettnek nevezzük az electrodynamometert, midőn szerkezetének egyes részletei ily tulajdonságúak; közelebbről pedig:

1. Midőn a mozogható rész felfüggesztése a föld nehézségi erejére nézve symmetrikus, ez anynyit mond, hogy a föld nehézségi ereje által okozott forgási nyomaték, F_α (12. §.) egyenlő értékű, de ellentett előjelű $(\varphi-\sigma)$ szögekre nézve szintén egyenlő értékű, de ellentett előjelű lesz.

Ebből folyik, hogy ilyenkor az F_α, 12. §., sorkifejtésének azon $b_{\alpha,2}$, $b_{\alpha,4}$.. tagjai, melyek a $(\varphi-\sigma)$ *páros* számú hatványaival szorozvák, *zérus* értékűek, azaz

$$b_{\alpha,2}=b_{\alpha,4}=\ldots=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

2. Midőn a mozogható rész felfüggesztő *sodronyai* (például bifiláris suspensiónál) symmetrikusak és symmetrikus szerkezetűek, ez annyit mond, hogy a rugalmassági erők által okozott forgásnyomaték F_β, 12. §., symmetrikus a $\varphi=\rho$ helyzet körűl; ekkor a $(\varphi-\rho)$ *páros* számú hatványaival szorzott együtthatók zérus értékűek; azaz

$$b_{\beta,2}=b_{\beta,4}=\ldots=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

3. Midőn a felfüggesztett rész alakja és tömegeloszlása symmetrikus (legalább két egymást derékszög alatt metsző síkra nézve, melyek vagy mindketten a forgás tengelyét tartalmazzák vagy azok egyike csak, míg a másik merőleges e tengelyre), akkor ez annyit mond, hogy a surlódás és a levegő ellenállása folytán fellépő forgásnyomaték F_γ, 12. §., *absolut* értékére nézve ugyanaz marad, ha a sebesség értéke ugyanaz, de ellentett előjelű. Ebből következik, hogy a sebesség *páros* számú hatványaival szorzott együtthatók zérus értékűek, azaz áll:

$$b_{\gamma,2}=b_{\gamma,4}=\ldots=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

4. Tekintve az a_2 és b_2 szerkezetét, 12. §., észreveszszük, hogy a midőn a $b_{\alpha,2}, b_{\beta,2}, b_{\gamma,2}$ együtthatók zérus értékűek: a σ és ρ mennyiségek pedig a megállapodás szerint a φ középértékénél kisebb, de vele egyenrendű mennyiségek, az a_2 tag rendje egygyel *magasabb*, míg b_2 zérus. Hasonló megjegyzés érvényes a_4 és b_4-re nézve.

Ezek szerint azt mondjuk: symmetria esetében az $\frac{1}{2}a_2\varphi^2$ tag a φ^3 mennyiséggel *egyenrendű*, ellenben az $\frac{1}{2}b_2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ *zérus értékű* tag lesz.

Ezen eredményre többször fogunk hivatkozni. (V. ö. a 33. §-t.)

4. Az egyenletrendszerek áttekinthető előtüntetése.

20. §. *Jelölések és rövidítések.*

A 14. §. (1) egyenlete szerint írtunk:

$$K\left(\xi_1\varphi+\tfrac{1}{2}\xi_2\varphi^2+\tfrac{1}{2.3}\xi_3\varphi^3+\ldots\right)=Q-Q_0$$

és a 13. §. szerint,

$$K\left(\eta_1\varphi+\tfrac{1}{2}\eta_2\varphi^2+\tfrac{1}{2.3}\eta_3\varphi^3+\ldots\right)=\omega.$$

Tegyük:

$$\left.\begin{aligned} i_1i_2(\eta_2\varphi+\tfrac{1}{2}\eta_3\varphi^2+\ldots)-\tfrac{1}{2}a_2\varphi^2-\tfrac{1}{2.3}a_3\varphi^3-\ldots-\tfrac{1}{2}b_2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2-\tfrac{1}{2.3}b_3\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^3-\ldots&=\Phi_{12}(t)\\ ii(\eta_2\varphi+\tfrac{1}{2}\eta_3\varphi^2+\ldots)-\tfrac{1}{2}a_2\varphi^2-\tfrac{1}{2.3}a_3\varphi^3-\ldots-\tfrac{1}{2}b_2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2-\tfrac{1}{2.3}b_3\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^3-\ldots&=\Phi(t)\\ i_1(\xi_2\varphi+\tfrac{1}{2}\xi_3\varphi^2+\ldots)&=\mathfrak{F}_{12}(t)\\ i(\xi_2\varphi+\tfrac{1}{2}\xi_3\varphi^2+\ldots)&=\mathfrak{F}(t)\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Tekintetbe véve a 16., 17., 18. §§-okban a tagok rendjéről mondottakat, közvetetlenűl találjuk, hogy a $\frac{d}{dt}(i\omega)$ és $\frac{dQ}{dt}$ alakú tagok legalább egygyel magasabb rendűek, mint a 15. §. I. II., III. egyenleteiben mellettök fellépő $M\frac{di}{dt}$, $L\frac{di}{dt}$, ωi, E alakú tagok.

Továbbá, a 17. és 18. §§-ok szerint a $\Phi_{12}(t)$, $\Phi(t)$, $\mathfrak{F}_{12}(t)$, $\mathfrak{F}(t)$ menynyiségek a φ^2-vel egyenrendűek, e szerint magasabb rendűek, mint a mellettök fellépő $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, $\varkappa^2\frac{d\varphi}{dt}$, $\lambda^2(\varphi-\vartheta)$ tagok.

Jegyzet: A következőkben a menynyiségeknek az idő szerint képezett differentiál-quotienseit rövidebben fogjuk jelölni, de nem NEWTON módjára, a menynyiség felett elhelyezett pont által, mert fellépnek itt az i variabilisek és változók szorzatai, hanem a menynyiségek jobb oldala fölé helyezett vonások által.

Ha most az idézett egyenletrendszereknél, minden egyes egyenletben a legalsóbb rendű tagokat az egyenlőség jele bal oldalára, a magasabbrendűeket ellenben azok jobb oldalára teszszük, akkor a 15. §. kifejezéseiből lesz:

$$\text{(I)} \quad \dots\dots\dots \quad \begin{cases} L_1 i_1' + M_0 i_2' + w_1 i_1 - E_1 = -(i_2\omega + Q)' \\ M_0 i_1' + L_2 i_2' + w_2 i_2 - E_2 = -(i_1\omega)' \\ \varphi'' + \varkappa^2\varphi' + \lambda^2(\varphi-\vartheta) = \Phi_{12}(t) + \mathfrak{F}_{12}(t) \end{cases}$$

$$\text{(II)} \quad \dots\dots\dots \quad \begin{cases} Li' + wi - E = -(i\omega + Q)' \\ \varphi'' + \varkappa^2\varphi' + \lambda^2(\varphi-\vartheta) = \Phi(t) + \mathfrak{F}(t) \end{cases}$$

$$\text{(III)} \quad \dots \quad \begin{cases} (L_{11}+2L_{31}+L_{33})i_1' + (M_0-L_{31}-L_{33}+L_{23})i_2' + (w_1+w_3)i_1 - w_3 i_2 - E_1 - E_3 = -(i_2\omega+Q)' \\ (M_0-L_{31}-L_{33}+L_{23})i_2' + (L_{22}-2L_{23}+L_{33})i_2' - w_3 i_1 + (w_2+w_3)i_2 - E_2 + E_3 = -(i_1\omega)' \\ \varphi'' + \varkappa^2\varphi' + \lambda^2(\varphi-\vartheta) = \Phi_{12}(t) + \mathfrak{F}_{12}(t) \end{cases}$$

21. §. *A III. egyenletrendszer egyszerűsítése.*

Az I. és III. rendszerek a megelőző §-ban egymástól csak csekély, alaki eltérésben különböznek. De ez is elmozdítható, legalább az egyenletek bal oldalát illetőleg, és pedig minden nehézség nélkül, ha a III. rendszer első két egyenletét egymással oly formán kapcsoljuk egybe, hogy egyszer az i_2, másszor az i_1 elimináltassék.

Tegyük azt és írjuk rövidség kedvéért:

$$\left.\begin{aligned} (w_2+w_3)(L_{11}+2L_{31}+L_{33}) + w_3(M_0-L_{31}-L_{33}+L_{23}) &= \mathbf{L}_1, \\ (w_2+w_3)(M_0-L_{31}-L_{33}+L_{23}) + w_3(L_{22}-2L_{23}+L_{33}) &= \mathbf{M}_1, \\ w_3(L_{11}+2L_{31}+L_{33}) + (w_1+w_3)(M_0-L_{31}-L_{33}+L_{23}) &= \mathbf{M}_2, \\ w_3(M_0-L_{31}-L_{33}+L_{23}) + (w_1+w_3)(L_{22}-2L_{23}+L_{33}) &= \mathbf{L}_2, \\ (w_1+w_3)(w_2+w_3) - w_3^2 &= W, \\ (w_2+w_3)(E_1+E_3) + w_3(E_2-E_3) = w_2(E_1+E_3) + w_3(E_1+E_2) &= \mathbf{E}_1, \\ w_3(E_1+E_3) + (w_1+w_3)(E_2-E_3) = w_1(E_2-E_3) + w_3(E_1+E_2) &= \mathbf{E}_2, \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots \quad (1)$$

Származik a III. egyenletrendszerből:

$$\text{(III)} \quad \dots \quad \begin{cases} \mathbf{L}_1 i_1' + \mathbf{M}_1 i_2' + W i_1 - \mathbf{E}_1 = -\{(w_2+w_3)(i_2\omega+Q)' + w_3(i_1\omega)'\} \\ \mathbf{M}_2 i_1' + \mathbf{L}_2 i_2' + W i_2 - \mathbf{E}_2 = -\{w_3(i_2\omega+Q)' + (w_1+w_3)(i_1\omega)'\} \\ \varphi'' + \varkappa^2\varphi' + \lambda^2(\varphi-\vartheta) = \Phi_{12}(t) + \mathfrak{F}_{12}(t) \end{cases}$$

Az I. és III. rendszer bal oldalainak alakja ugyanaz; jobb oldalaik, melyek tagjai magasabb rendűek, mint a bal oldalokéi, kissé különbözők.

22. §. *Az I. és III. rendszer átalakítása. Rövidítések.*

A következőkben az I. és III. rendszer első két egyenletét azon czélból fogjuk transformálni, hogy azok kényelmesebben kezelhetők legyenek.

Ezen egyenletpárok typikus alakja írható:

$$\left.\begin{aligned} L_1 i_1' + M_1 i_2' + W_1 i_1 - E_1 &= -\Omega_1' \\ M_2 i_1' + L_2 i_2' + W_2 i_2 - E_2 &= -\Omega_2' \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

A transformatiót most olyformán teszszük meg, hogy az egyenletek baloldalai csak i_1-et és differentiál-quotienseit vagy csak i_2-t és differentiál-quotienseit tartalmazzák; a jobb oldalak ellenben csak magasabb rendű tagokat.

Az (1) második egyenletéből következik:

$$i_2' = -\frac{1}{L_2}\{M_2 i_1' + W_2 i_2 - E_2 + \Omega_2'\}.$$

Helyettezve ezen értéket az első egyenletbe és szorozva azt L_2-vel, ered:

$$L_1 L_2 i_1' - M_1(M_2 i_1' + W_2 i_2 - E_2 + \Omega_2') + L_2 W_1 i_1 - L_2 E_1 = -L_2 \Omega_1'$$

vagy:

$$(L_1 L_2 - M_1 M_2) i_1' - M_1 W_2 i_2 + L_2 W_1 i_1 + M_1 E_2 - L_2 E_1 = M_1 \Omega_2' - L_2 \Omega_1'$$

Ezen egyenletnek az idő szerint képezett differential-quotiense, L_1, L_2, M_1, M_2-et állandónak tekintve:

$$(L_1 L_2 - M_1 M_2) i_1'' - M_1 W_2 i_2' + L_2 W_1 i_1' + M_1 E_2' - L_2 E_1' = M_1 \Omega_2'' - L_2 \Omega_1''$$

Ámde, az első egyenletből:

$$M_1 i_2' = -\{L_1 i_1' + W_1 i_1 - E_1 + \Omega_1'\}.$$

Helyettezve ezen értéket az utolsó egyenletbe, a tagok rendezése után lesz:

$$(L_1 L_2 - M_1 M_2) i_1'' + (W_1 L_2 + W_2 L_1) i_1' + W_1 W_2 i_1 - W_2 E_1 + M_1 E_2' - L_2 E_1' = -W_2 \Omega_1' + M_1 \Omega_2'' - L_2 \Omega_1'' \quad (2)$$

Egészen analog szerkezetű egyenlet származik, ha az épen követett eljárást oly módon alkalmazzuk, hogy először i_1'-t az (1) első egyenletéből meghatározzuk, azután ezen értéket a második egyenletbe helyettezzük és annak differentiál-quotiensét az idő szerint képezzük, végre abba az $M_2 i_1'$ értékét a második egyenletből helyettezzük.

Származik ekként, a mint egyébiránt az indexek és betűk felcseréléséből amúgy is következik:

$$(L_1 L_2 - M_1 M_2) i_2'' + (W_2 L_1 + W_1 L_2) i_2' + W_2 W_1 i_2 - W_1 E_2 + M_2 E_1' - L_1 E_2' = -W_1 \Omega_2' + M_2 \Omega_1'' - L_1 \Omega_2'' \quad (3)$$

Hogy az I. és III. rendszer egyenleteit rövidebben és egyszerre lehessen írni, vegyük tekintetbe az L, M, W, E, Ω együtthatókat és menynyiségeket, a mint ezek ezen § typikus (1) egyenleteinek az utolsóelőtti és az utolsó § megfelelő egyenletei összehasonlításából következnek.

Tegyük rövidség kedvéért:

Az I. egyenletrendszerben:

$$\frac{w_1L_2+w_2L_1}{L_1L_2-M_0^2}=\mathfrak{a},$$

$$\frac{w_1w_2}{L_1L_2-M_0^2}=\mathfrak{b},$$

$$\frac{w_2E_1-M_0E_2'+L_2E_1'}{L_1L_2-M_0^2}=E_1(t),$$

$$\frac{w_1E_2-M_0E_1'+L_1E_2'}{L_1L_2-M_0^2}=E_2(t),$$

$$\frac{-w_2(i_2\omega)'+M_0(i_1\omega)''-L_2(i_2\omega)''}{L_1L_2-M_0^2}=G_1(t),$$

$$\frac{-w_1(i_1\omega)'+M_0(i_2\omega)''-L_1(i_1\omega)''}{L_1L_2-M_0^2}=G_2(t),$$

$$\frac{-w_2Q'-L_2Q''}{L_1L_2-M_0^2}=\mathfrak{G}_1(t),$$

$$\frac{+M_0Q''}{L_1L_2-M_0^2}=\mathfrak{G}_2(t).$$

A III. egyenletrendszerben:

$$W\frac{\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_2}{\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2-\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2}=\mathfrak{a},$$

$$\frac{W^2}{\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2-\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2}=\mathfrak{b},$$

$$\frac{W\mathbf{E}_1-\mathbf{M}_1\mathbf{E}_2'+\mathbf{L}_2\mathbf{E}_1'}{\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2-\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2}=E_1(t),$$

$$\frac{W\mathbf{E}_2-\mathbf{M}_2\mathbf{E}_1'+\mathbf{L}_1\mathbf{E}_2'}{\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2-\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2}=E_2(t),$$

$$\frac{-W\big(\Omega_1-(w_2+w_3)Q\big)'+\mathbf{M}_1(\Omega_2-w_3Q)''-\mathbf{L}_2\big(\Omega_1-(w_2+w_3)Q\big)''}{\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2-\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2}=G_1(t)$$

$$\frac{-W(\Omega_2-w_3Q)'+\mathbf{M}_2\big(\Omega_1-(w_2+w_3)Q\big)''-\mathbf{L}_1(\Omega_2-w_3Q)''}{\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2-\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2}=G_2(t)$$

$$\frac{-W(w_2+w_3)Q'+\mathbf{M}_1w_3Q''-\mathbf{L}_2(w_2+w_3)Q''}{\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2-\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2}=\mathfrak{G}_1(t)$$

$$\frac{-Ww_2Q'+\mathbf{M}_2(w_2+w_3)Q''-\mathbf{L}_1w_3Q''}{\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2-\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2}=\mathfrak{G}_2(t)$$

Itt a III. rendszerben, az $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$, $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, W, $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ jelek a 21. §-ban bevezetett jelentőséggel bírnak; továbbá, itt is áll, a 21. §. (III) és a 22. §. (1) egyenletei értelmében:

$$\left.\begin{aligned}\Omega_1'&=(w_2+w_3)(i_2\omega+Q)'+w_3(i_1\omega)'\\ \Omega_2'&=w_3(i_2\omega+Q)'+(w_1+w_3)(i_1\omega)'\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(4)$$

Végre a II. rendszer számára is vezetjük be a következő rövidítéseket:

$$\frac{w}{L_0}=\mathfrak{c},\qquad -\frac{(i\omega)'}{L_0}=G(t),$$

$$\frac{E}{L_0}=E(t),\qquad -\frac{Q'}{L_0}=\mathfrak{G}(t).$$

A bevezetett menynyiségek közül $E_1(t)$, $E_2(t)$, $E(t)$ olyanok, melyek mint az idő explicit függvényei advák és e szerint ismereteseknek tekintendők.

Ellenben a $G_1(t)$, $G_2(t)$, $G(t)$, $\mathfrak{G}_1(t)$, $\mathfrak{G}_2(t)$, $\mathfrak{G}(t)$ menynyiségek az i_1, i_2, ω, vagy az i, ω változók és differentiál-quotienseik függvényei. Ezen menynyiségeket még nem ismerjük, de rendjök magasabb mint a mellettök az egyenletekben föllépő tagoké.

Ezeknek a pontosság tetszésszerinti fokáig terjedő számítására nézve v. ö. a 25. és 26. §§-okat.

23. §. *Az átalakított egyenletrendszerek alakja.*

Tekintettel a megelőző 20., 21., 22. §§-okban bevezetett rövidítésekre és átalakításokra, a 15. §. rendszerei a következőkbe mennek át:

Az I. és III. rendszer:

$$\text{(I) és (III)} \quad . \ . \ . \quad \left\{ \begin{aligned} i_1''' + \mathfrak{a} i_1'' + \mathfrak{b} i_1 - E_1(t) &= G_1(t) + \mathfrak{G}_1(t) \\ i_2''' + \mathfrak{a} i_2'' + \mathfrak{b} i_2 - E_2(t) &= G_2(t) + \mathfrak{G}_2(t) \\ \varphi'' + \varkappa^2 \varphi' + \lambda^2 (\varphi - \vartheta) - i_1(\eta_1 i_2 + \xi_1) &= \Phi_{12}(t) + \mathfrak{F}_{12}(t) \end{aligned} \right.$$

A II. rendszer:

$$\text{(II)} \quad . \ . \ . \ . \quad \left\{ \begin{aligned} i' + \mathfrak{c} i - E(t) &= G(t) + \mathfrak{G}(t) \\ \varphi'' + \varkappa^2 \varphi' + \lambda^2 (\varphi - \vartheta) - i(\eta_1 i + \xi_1) &= \Phi(t) + \mathfrak{F}(t) \end{aligned} \right.$$

Az egyenletek, ezen alakjoknál fogva, további vizsgálatokra igen alkalmasak, mert a jobboldali tagok rendje minden egyenletben magasabb, mint ugyanazon egyenlet baloldali tagjaié.

Különösen pedig az I. és III. rendszer, mindaddig, míg egészen részletes számítást nem kell tennünk, a fent adott alakban mindig egyidejűleg tárgyalható.

MÁSODIK RÉSZ.

1. Az electrodynamometer egyenletrendszereinek különböző közelítési fokai.

24. §. *A közelítő tárgyalás megfelel a physikai czéloknak. A közelítés fokai.*

A probléma további tárgyalásánál a physikai szempont lesz a mérvadó.

Az eljárás lényeges elve ugyanaz lesz, a mely igen számos mechanikai és physikai feladat megfejtésénél alkalmaztatik.

Ez az elv pedig abban áll, hogy valamely megvizsgálandó jelenségre vagy bizonyos viszonyokra vonatkozó egyenletet (legyen ez közönséges vagy differentiál-egyenlet) csak a pontosság azon határáig bezárólag állítjuk fel, a mely pontosságot a jelenség vagy a vonatkozások mathematikai taglalások segélyével való leírásánál elérni szándékunk.

Ekkor valóban, a *közelítőleg felállított differentiál-egyenlet megoldása a jelenség keresett elméletét a pontosságnak ugyanazon fokáig bezárólag fogja szolgáltatni, mint a milyen annak a pontosságnak (azaz közelítésnek) a foka, a melylyel a differentiál-egyenlet felállíttatott.*

Ezt az elvet itt is fogjuk alkalmazni a 15. és 23. §§-okban részletes áttekintéssel előterjesztett differentiál-egyenletek rendszereire, és annak foganatosítása az electrodynamometer elméletét a közelítésnek oly fokáig fogja megadni, a milyet physikai czélok megkivánnak.

Hogy a részletezett elvet sikerrel lehessen alkalmazni, mindenek előtt gondosan kell megállapitanunk azt az eljárást, a mely szerint magokat a probléma differentiál-egyenleteit az általános egyenletekből a közelítés különböző fokát bezáró pontossággal képezzük.

Erre nézve mérvadó a 16—18. §§-ok taglalása, mely a 15. §. egyenleteiben föllépő tagok értékének *rendjét* állapította meg.

Ezeket figyelembe véve, azt mondjuk, hogy a 15. §-ban felállított egyenletrendszerek *első közelítését* nyerjük, *ha valamenynyi egyenletben csakis a legalsóbb rendű tagok tartatnak meg.*

A magasabb rendű közelítések megállapításánál egészen analog módon, folytatólagosan járunk el, úgy hogy szabad mondanunk :

Az egyenletrendszer tetszőleges magasabb, n-edrendű közelítését nyerjük, ha valamenynyi egyes egyenletben még mindazok a tagok vétetnek figyelembe, melyek az egyes egyenletek legalsóbb tagjainál (n—1)-szer magasabb rendűek.

25. §. *Az első közelítés differentiál-egyenletei; oldhatóságuk általánosságban.*

Jelölje az I. és III. rendszerben i_{1_1}, i_{2_1}, φ_1 ; a II. rendszerben i_1, φ_1 az áramintensitások és az eltérés azon értékeit, melyek az első közelítésben felállított egyenletrendszerek megoldását képezik.

Ily jelöléssel a 23. §. első közelítése lesz :

$$\text{(I) és (III)} \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} i''_{1_1}+\mathfrak{a}i'_{1_1}+\mathfrak{b}i_{1_1}-E_1(t)=0, \\ i''_{2_1}+\mathfrak{a}i'_{2_1}+\mathfrak{b}i_{2_1}-E_2(t)=0, \\ \varphi''_1+\varkappa^2\varphi'_1+\lambda^2(\varphi_1-\vartheta)-\eta_1 i_{1_1}i_{2_1}-\xi_1 i_{1_1}=0. \end{cases}$$

$$\text{(II)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} i'_1+\mathfrak{c}i_1-E(t)=0, \\ \varphi''_1+\varkappa^2\varphi'_1+\lambda^2(\varphi_1-\vartheta)-\eta_1 i_1^2-\xi_1 i_1=0. \end{cases}$$

Jegyzet: Az I. és III. rendszer első két egyenletének eredeti alakja, az első közelítésben közvetetlenűl a 20. és 21. §§-okból írható:

$$\text{(I)} \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} L_1 i'_{1_1}+M_0 i'_{2_1}+w_1 i_{1_1}-E_1=0, \\ M_0 i'_{1_1}+L_2 i'_2+w_2 i_{2_1}-E_2=0. \end{cases} \qquad \text{(III)} \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \mathbf{L}_1 i'_{1_1}+\mathbf{M}_1 i'_{2_1}+W i_{1_1}-\mathbf{E}_1=0, \\ \mathbf{M}_2 i'_{1_1}+\mathbf{L}_2 i'_2+W i_{2_1}-\mathbf{E}_2=0. \end{cases}$$

hol azonban az E_1, E_2 electromotorius erőket a 22. §. $E_1(t)$, $E_2(t)$, függvényeivel nem szabad összetéveszteni.

Az egyenletpárok transformatiója a 22. §. eljárása szerint közvetetlenűl az itt felírt rendszerek első két egyenletéhez vezet.

Észreveszszük, hogy az I. és III. egyenletrendszerben az első két egyenlet független a φ-től. Ellenben a harmadik egyenlet utolsó tagjába helyettezendők az első két egyenlet megoldásai i_{1_1}, i_{2_1} (a melyeket most az idő ismert függvényei gyanánt kell tekintenünk); e szerint a harmadik egyenlet már függ az első kettőtől.

Hasonlóképen a II. egyenletrendszer első egyenlete független a φ-től, míg a második egyenlet az elsőnek megoldásától, i_1-től függ.

A megelőző §-ban felírt egyenletekben a $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\varkappa^2$, λ^2, $\lambda^2\vartheta$, η_1 menynyiségek *állandók.*

Az $E_1(t)$, $E_2(t)$, $E(t)$ pedig az időnek adott, és így ismert függvényei (22. §.).

Ezek szerint az I. és III. rendszerben i_{1_1}, i_{2_1} mennyiségek differentiál-egyenleteinek, valamint a II. rendszerben i_1 differentiál-egyenletének a megoldása közönséges, elemi eljárások segélyével egyszerű quadraturákra vezethetők vissza, a melyek, ha csak az $E_1(t)$, $E_2(t)$, $E(t)$ nem nagyon complicált függvények, minden nehézség nélkül kiszámíthatók.

Ez által az I., III., és II. rendszer utolsó egyenleteiben föllépő $\eta_1 i_{1_1} i_{2_1}+\xi_1 i_{1_1}$, illetve $\eta_1 i_1^2+\xi_1 i_1$, tagok ismeretesek lesznek, és a két rendszerben föllépő differentiál-egyenletei a φ-nek ugyanoly eljárás segélyével tárgyalhatók, mint a fentnevezettek és megoldásuk szintén egyszerű quadraturákra vezethető vissza.

E szerint a *rendszerek integrátiója első közelítésben quadraturákra van visszavezetve.*

26. §. *A második közelítés differentiál-egyenletei; oldhatóságuk általánosságban.*

Jelölje itt, megfelelőleg a megelőző §-nak, az I. és III. rendszerben i_{1_2}, i_{2_2}, φ_2, a II. rendszerben i_2, φ_2 az áramintensitások és a kitérés azon értékeit, melyek a második közelítésben felállított differentiál-egyenletek megoldásait képezik.

A 24. §-ban tett megjegyzések értelmében ezen egyenletek második közelítését találjuk, ha a 22. §. szerint a $G_1(t)$, $G_2(t)$, $G(t)$, $\mathfrak{G}_1(t)$, $\mathfrak{G}_2(t)$, $\mathfrak{G}(t)$ menynyiségek legalsóbb tagjait képezzük, továbbá, a φ egyenletei utolsó tagjai helyébe teszünk: $\eta_1 i_{1_2} i_{2_2}+\xi_1 i_{1_2}$ és $\eta_1 i_2^2+\xi_1 i_2^2$, és végre még a 20. §. szerint a $\Phi_{12}(t)$, $\Phi(t)$; $\mathfrak{F}_{12}(t)$, $\mathfrak{F}(t)$, menynyiségek legalsó tagjait képezzük.

A nevezett tagok tényleges képzésénél nehány megfontolás tartandó szem előtt.

Tekintetbe véve ugyanis a 16., 17., 18. §§-okban a tagok rendjéről mondottakat és vonatkoztatva azokat az első és a második közelítés megoldásai *különbségére,* észreveszszük, hogy az I. és III. rendszerben az $i_{1_2}-i_{1_1}$, $i_{2_2}-i_{2_1}$, $\varphi_2-\varphi_1$, a II. rendszerben az i_2-i_1, $\varphi_2-\varphi_1$ különbségek magasabb rendűek, mint (I. és III.-ban) az i_{1_1}, i_{2_1}, φ_1; illetve (II.-ben) az i_1, φ_1 menynyiségek.

De még tovább mehetünk: ugyanis, ha az I. és III. rendszerben i_1, i_2, φ, a II. rendszerben i, φ a 23. §. általános egyenleteinek megoldásai, akkor még mindig áll az, hogy az I. és III.-ban az $i_1-i_{1_1}$, $i_2-i_{2_1}$, $\varphi-\varphi_1$ és a II.-ben az $i-i_1$, $\varphi-\varphi_1$ különbségek magasabb rendűek, mint az i_1, i_2, φ, illetve i, φ menynyiségek.

Ámde, a második közelítés felállításánál képezendő és hozzálépő tagok az I. rendszerben az i_1, i_2, φ, a II. rendszerben az i, φ menynyiségekből és ezek időszerinti differentiál-quotienseiből vannak szerkesztve.

Ez a körülmény arra vezet, hogy ezen tagok képzésénél csak magasabb (nevezetesen harmad-) rendű elhanyagolást követünk el, ha a tagokat alkotó az I. rendszerben i_1, i_2, φ menynyiségek helyébe i_{1_1}, i_{2_1}, φ_1-et, a II. rendszerben az i, φ menynyiségek helyébe i_1, φ_1-et helyettezzük, melyek az első közelítésben felállított egyenletrendszerek megoldásai, lévén e szerint az időnek ismeretes függvényei. Ezek értelmében a második közelítésben felállított egyenletrendszerek alakja nem lényegesen, és pedig csak anynyiban különbözik az első közelítésben felállított rendszerek alakjától, hogy ezekhez még egy fokkal magasabb rendű ismeretes függvénye az időnek lép hozzá.

Ebből folyik, hogy a *második közelítésben felállított egyenletek integratiója* ugyanoly módon, mint az első közelítésben felállított rendszereké, 25. §., *egyszerű quadraturákra* van visszavezetve.

A mi pedig illeti az Ω_1 és Ω_2 értékeit, 22. §., ezekre nézve megjegyzendő, hogy a bennök előforduló i_1, i_2, φ menynyiségek a fent tett észrevétel szerint helyettesíthetők i_{1_1}, i_{1_1}, i_{2_1}, i_{2_1}, φ_1 menynyiségek által. Az $(i_1\omega)$, $(i_2\omega)$ szorzatokhoz és a Q menynyiséghez az $_1$ indexet fogjuk kapcsolni, hogy ez által azon legalsóbb rendű tagok értékét jelöljük, melyek a második közelítésnél hozzálépnek.

Figyelembe véve az ω eredeti értékeit, 13. §. (4), valamint Q-ét is, 14. §. (1), közvetetlenűl származik:

$$
\begin{aligned}
(i_1\omega)'_1 &= K\eta_1(i_{1_1}\varphi_1)', \\
(i_2\omega)'_1 &= K\eta_1(i_{2_1}\varphi_1)', \\
Q'_1 &= K\xi_1\varphi'_1 \\
\Omega'_{1_1} &= K\eta_1\{(w_2+w_3)\,(i_{2_1}\varphi_1)'+w_3(i_{1_1}\varphi_1)'\}+K\xi_1(w_2+w_3)\varphi'_1 \\
\Omega'_{2_1} &= K\eta_1\{w_3(i_{2_1}\varphi_1)'+(w_1+w_3)\,(i_{1_1}\varphi_1)'\}+K\xi_1 w_3\varphi'_1
\end{aligned}
$$

Ezen értékekkel a $G_1(t)$, $G_2(t)$, $\mathfrak{G}_1(t)$, $\mathfrak{G}_2(t)$ függvények értékét első közelítésökben számíthatni ki; ugyanis a 22. §. értelmében azonnal találjuk:

Az I. rendszerre nézve:

hol:

$$\mathfrak{d}=\frac{K}{L_1L_2-M_0^{\,2}};$$

$$
\left.
\begin{aligned}
G_{1_1}(t) &= -\mathfrak{d}\eta_1\{w_2(i_{2_1}\varphi_1)'-M_0(i_{1_1}\varphi_1)''+L_2(i_{2_1}\varphi_1)''\}, \\
G_{2_1}(t) &= -\mathfrak{d}\eta_1\{w_1(i_{1_1}\varphi_1)'-M_0(i_{2_1}\varphi_1)''+L_1(i_{1_1}\varphi_1)''\}, \\
\mathfrak{G}_{1_1}(t) &= -\mathfrak{d}\xi_1(w_2\varphi'_1+L_2\varphi''_1), \\
\mathfrak{G}_{2_1}(t) &= +\mathfrak{d}\xi_1 M_0\varphi''_1.
\end{aligned}
\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)
$$

A III. rendszerre nézve:

$$\left.\begin{aligned}
G_{1_1}(t) &= -\mathfrak{d}\eta_1\{W[(w_2+w_3)(i_{2_1}\varphi_1)'+w_3(i_{1_1}\varphi_1)'] - [\mathbf{M}_1 w_3 - \mathbf{L}_2(w_2+w_3)](i_{2_1}\varphi_1)''+ \\
&\qquad + [\mathbf{L}_2 w_3 - \mathbf{M}_1(w_1+w_3)](i_{1_1}\varphi_1)''\} \\
G_{2_1}(t) &= -\mathfrak{d}\eta_1\{W[w_3(i_{2_1}\varphi_1)'+(w_1+w_3)(i_{1_1}\varphi_1)'] - [\mathbf{M}_2(w_2+w_3) - \mathbf{L}_1 w_3](i_{2_1}\varphi_1)''+ \\
&\qquad + [\mathbf{L}_1(w_1+w_3) - \mathbf{M}_2 w_3](i_{1_1}\varphi_1)''\} \\
\text{hol:}\quad \mathfrak{d} &= \frac{K}{\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2 - \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2}; \\
\mathfrak{G}_{1_1}(t) &= -\mathfrak{d}\xi_1\{W(w_2+w_3)\varphi_1' + [\mathbf{L}_2(w_2+w_3) - \mathbf{M}_1 w_3]\varphi_1''\} \\
\mathfrak{G}_{2_1}(t) &= -\mathfrak{d}\xi_1\{W w_3\varphi_1' + [\mathbf{L}_1 w_3 - \mathbf{M}_2(w_2+w_3)]\varphi_1''\}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (2)$$

Továbbá, az I. és III. rendszerre nézve közösen:

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_{12_1}(t) &= \eta_2 i_{1_1} i_{2_1}\varphi_1 - \tfrac{1}{2}a_2\varphi_1^2 - \tfrac{1}{2}b_2\varphi_1'^2 \\
\mathfrak{F}_{12_1}(t) &= \xi_2 i_{1_1}\varphi_1
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Végre, a II. rendszerre nézve:

$$\text{hol:}\quad \mathfrak{e} = \frac{K}{L_0}; \qquad \left.\begin{aligned}
L_0 G_1(t) &= -K\eta_1(i_1\varphi_1)' \\
L_0\mathfrak{G}_1(t) &= -K\xi_1\varphi_1' \\
\Phi_1(t) &= \eta_2 i_1^2\varphi_1^2 - \tfrac{1}{2}a_2\varphi_1^2 - \tfrac{1}{2}b_2\varphi_1'^2 \\
\mathfrak{F}_1(t) &= \xi_2 i_1\varphi_1
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

E szerint a *második közelítésben* felállított egyenletrendszerek, a fent bevezetett jelölések felhasználásával:

$$\text{(I) és (III)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \left\{\begin{aligned}
i_{1_2}'' + \mathfrak{a}i_{1_2}' + \mathfrak{b}i_{1_2} - E_1(t) &= G_{1_1}(t) + \mathfrak{G}_{1_1}(t), \\
i_{2_2}'' + \mathfrak{a}i_{2_2}' + \mathfrak{b}i_{2_2} - E_2(t) &= G_{2_1}(i) + \mathfrak{G}_{2_1}(t), \\
\varphi_2'' + \varkappa^2\varphi_2' + \lambda^2(\varphi_2 - \vartheta) - \eta_1 i_{1_2} i_{2_2} - \xi_1 i_{1_2} &= \Phi_{12_1}(t) + \mathfrak{F}_{12_1}(t).
\end{aligned}\right.$$

$$\text{(II)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \left\{\begin{aligned}
i_2' + \mathfrak{c}i_2 - E(t) &= G_1(t) + \mathfrak{G}_1(t), \\
\varphi_2'' + \varkappa^2\varphi_2' + \lambda^2(\varphi_2 - \vartheta) - \eta_1 i_2^2 - \xi_1 i_2 &= \Phi_1(t) + \mathfrak{F}_1(t).
\end{aligned}\right.$$

Ezen egyenletek jellemző alakja ugyanaz, mint az első közelítés egyenleteié; ezért a 25. §-ban és itt fent tett megjegyzés érvényes. Miután ugyanis, mint épen kimutattuk, az első közelítés megoldásaiból valamennyi G, $\mathfrak{G}$, Φ, $\mathfrak{F}$ függvények legalsó tagjai az idő explicit függvényei gyanánt számíthatók ki, és mivel ezenkívül az $E(t)$ függvények, 22. §., szintén az időnek adott függvényei, önként következik, hogy ezen egyenletrendszerek integrátiója is quadraturákra van visszavezetve.

Jegyzet: A tekintetbe vett egyenletrendszereknek a harmadik vagy még magasabb fokú közelítésben való felállítását itt mellőzzük, mivel az erre szolgáló eljárás egészen analog ahhoz, a melynek segélyével az első közelítés integráljaiból a jelen §-ban a második közelítés egyenleteit írtuk fel.

Ily esetben rendesen olyanynyira egyszerűsítő viszonyok lépnek fel, hogy a magasabb rendű tagok száma igen kicsiny lesz és ezért is a magasabb rendű közelítések algebrai számítása felette nagy mértékben egyszerűsbíttetik.

2. Az electrodynamometer differentiál-egyenleteinek integrátiója.

27. §. *Az egyenletek két typusa és ezek integrátiója a parameterek variatiója módszere segélyével.*

Ha a 25. és 26. §§-okban az első és második közelítésben felállított egyenletek integratióját kívánjuk végezni, meg kell jegyeznünk, hogy minden közelítésben a felállított egyenlet csak *egy* variabilisnek a differentiál-quotienseit és az időnek egy ismert függvényét tartalmazza.

Az I. és III. rendszer valamenynyi egyenlete, továbbá a II. rendszer második egyenlete következő közös typussal bír (y-t a megfelelő variabilis helyére téve):

$$y''+T_1y'+T_2y=T, \qquad (1)$$

Ellenben a II. rendszer első egyenletének typusa:

$$z'+T_1z=T \qquad (2)$$

E mellett T_1, T_2, T, illetve T_1, T az időnek ismeretes függvényét jelentik.

Tekintsük az *első* typust és jelentsék y_1, y_2 az

$$y''+T_1y'+T_2y=0,$$

nem teljes egyenletnek partikuláris megoldásait, akkor a parameterek variatiója elemi módszere értelmében, ezen első typus teljes megoldása következő épen adódik:

$$y=c_1y_1+c_2y_2+y_1\left\{\int\frac{T}{y_2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{y_1}{y_2}\right)'}dt+\Delta c_1\right\}+y_2\left\{\int\frac{T}{y_1}\cdot\frac{1}{\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'}dt+\Delta c_2\right\} \qquad (3)$$

Itt c_1 és c_2 az integrátió állandóit jelentik, épen úgy Δc_1 és Δc_2 (v. ö. az alant tett észrevételt); a $c_1y_1+c_2y_2$ összeg az $y''+T_1y'+T_2y=0$ nem teljes egyenletnek teljes megoldása; a többi két tag a jobboldali T-tag jelenléténél fogva lép hozzá.

A *második* typusra vonatkozólag észreveszszük, hogy annak teljes megoldása írható:

$$z=ce^{-\int T_1dt}+e^{-\int T_1dt}\left\{\int Te^{\int T_1dt}dt+\Delta c\right\} \qquad (4)$$

Itt c és Δc az integrátió állandói (v. ö. az alant tett megjegyzést); a jobboldali első tag a $z'+Tz=0$ nem teljes egyenletnek teljes megoldása; a második tag a jobboldali T-tag jelenléte folytán lép hozzá.

Jegyzet a Δc_1, Δc_2, Δc állandóiról az integrátiónak.

Azonnal észreveszszük, hogy a Δc_1, Δc_2, Δc állandók jelenléténél fogva fellépő tagok, nevezetesen

$$\Delta c_1y_1+\Delta c_2y_2\,; \quad \Delta ce^{-\int T_1dt},$$

szintén, *alakjokra* nézve, az $y''+T_1y'+T_2=0$; illetve $z'+T_1z=0$ nem teljes egyenleteknek teljes integráljai és ezért az ilyenek minden tulajdonságával is bírnak.

Ezen tagokat az első tagokhoz is lehetne kapcsolni, és írni:

$$(c_1+\Delta c_1)y_1+(c_2+\Delta c_2)y_2\,; \quad (c+\Delta c)e^{-\int T_1dt}\,;$$

ezen összegek is, alakjokat illetőleg a nem teljes egyenleteknek teljes integráljai.

Azonban már azon oknál fogva is célszerűbb a tagokat, mint fent, külön felírni, mivel azon feltételi egyenletek tárgyalásánál, melyek az integrátió állandóit meghatározzák, a magasabb rendű közelítések számításánál a Δc_1, Δc_2, Δc állandókat külön kell meghatározni.

28. §. *Jelölések. Az electrodynamometer nem teljes egyenletei és azok teljes megoldása. Az integrátió állandói.*

Hogy a megelőző §-ban körvonalozott eljárást lehessen alkalmazni, mindenekelőtt a 23. §. nem teljes egyenleteit kell felírnunk és integrálnunk.

Könynyebb megkülönböztetés céljából az i_1, i_2, φ; i, φ menynyiségekhez a $_0$ indexet kivánjuk hozzákapcsolni, ha avval a nem teljes egyenleteknek teljes megoldásait akarjuk jelelni.

Ezen nem teljes egyenletek pedig a megelőző és a 23. §. értelmében a következők:

$$\text{(I) és (III)} \quad \ldots\ldots \quad \left\{\begin{aligned} i''_{1_0}+\mathfrak{a}i'_{1_0}+\mathfrak{b}i_{1_0}&=0\\ i''_{2_0}+\mathfrak{a}i'_{2_0}+\mathfrak{b}i_{2_0}&=0\\ \varphi''_0+\varkappa^2\varphi'_0+\lambda^2(\varphi_0-\vartheta)&=0 \end{aligned}\right\}$$

$$\text{(II)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \left\{\begin{aligned} i'_0+\mathfrak{c}i_0&=0\\ \varphi''_0+\varkappa^2\varphi'_0+\lambda^2(\varphi_0-\vartheta)&=0 \end{aligned}\right\}$$

A felírt egyenletek valamenynyi együtthatója állandó; e szerint megoldásaik közvetetlenűl adódnak.

I. és III. rendszer. Az intensitás két egyenleteinek teljes megoldása írható:

$$\left.\begin{aligned} i_{1_0}&=\alpha_1 e^{-\varepsilon_1 t}+\beta_1 e^{-\varepsilon_2 t}\\ i_{2_0}&=\alpha_2 e^{-\varepsilon_1 t}+\beta_2 e^{-\varepsilon_2 t} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

A két partikuláris megoldás ellenben:

$$e^{-\varepsilon_1 t}, \quad e^{-\varepsilon_2 t};$$

e mellett az ε_1 és ε_2 állandóknak meg kell felelniök az

$$\varepsilon^2-\mathfrak{a}\varepsilon+\mathfrak{b}=0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

feltételi egyenletnek; értékök e szerint:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1&=\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}-\sqrt{\tfrac{1}{4}\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}}\\ \varepsilon_2&=\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}+\sqrt{\tfrac{1}{4}\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4a)$$

Helyettezve ezekbe a $\mathfrak{a}$ és $\mathfrak{b}$-nek a 22. §. I. és III. rendszereihez tartozó értékeit, lesz

$$\text{I.} \quad 2(L_1L_2-M_0^2)\varepsilon_1=w_1L_2+w_2L_1-\{(w_1L_2+w_2L_1)^2-4w_1w_2M_0^2\}^{\frac{1}{2}},$$

$$2(L_1L_2-M_0^2)\varepsilon_2=w_1L_2+w_2L_1+\{(w_1L_2+w_2L_1)^2-4w_1w_2M_0^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{III.} \quad 2(\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2-\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)\varepsilon_1=W[\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_2-\{(\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_2)^2-4\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\}^{\frac{1}{2}}],$$

$$2(\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2-\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)\varepsilon_2=W[\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_2+\{(\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_2)^2-4\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\}^{\frac{1}{2}}].$$

Figyelembe véve az L_1, L_2, M_0, $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$, $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ menynyiségek lényegét és jelentőségét, azonnal észreveszszük, hogy az $L_1L_2-M_0^2$ és $\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2-\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$ különbségek mindig *positiv* értékűek; ugyanaz áll a $\{\ldots\}$ zárójelekben lévő menynyiségekre nézve is; e szerint ε_1 és ε_2 mindig *reális* és *positiv* két menynyiség.

Írjuk ezek szerint:

$$\left.\begin{aligned} i_{1_0}&=e^{-\frac{1}{2}\mathfrak{a}t}\left\{\alpha_1 e^{-\frac{1}{2}t\sqrt{\frac{1}{4}\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}}}+\beta_1 e^{+\frac{1}{2}t\sqrt{\frac{1}{4}\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}}}\right\}\\ i_{2_0}&=e^{-\frac{1}{2}\mathfrak{a}t}\left\{\alpha_2 e^{-\frac{1}{2}t\sqrt{\frac{1}{4}\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}}}+\beta_2 e^{+\frac{1}{2}t\sqrt{\frac{1}{4}\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}}}\right\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Jegyzet az integrátió α_1, β_1, α_2, β_2 állandóinak egymással való öszszefüggéséről.

Az intensitásnak fent írt nem teljes egyenleteinek egyenlőknek kell lenniök azokkal a nem teljes egyenletekkel, melyek a 20. és 21. §§-okban fellépő, eredeti és át nem alakított alakjaiból az intensitás egyenleteinek következnek.

Az I. rendszerben: $\left.\begin{aligned} L_1 i'_{1_0}+M_0 i'_{2_0}+w_1 i_{1_0}&=0\\ M_0 i'_{1_0}+L_2 i'_{2_0}+w_2 i_{2_0}&=0 \end{aligned}\right\}$, A III. rendszerben: $\left.\begin{aligned} \mathbf{L}_1 i'_{1_0}+\mathbf{M}_1 i'_{2_0}+W i_{1_0}&=0\\ \mathbf{M}_2 i'_{1_0}+\mathbf{L}_2 i'_{2_0}+W i_{2_0}&=0 \end{aligned}\right\}$

A 22. §. eljárása szerint ezen párokból azonnal származik a fent használt alak:

$$\left.\begin{aligned} i''_{1_0}+\mathfrak{a}i'_{1_0}+\mathfrak{b}i_{1_0}&=0\\ i''_{2_0}+\mathfrak{a}i'_{2_0}+\mathfrak{b}i_{2_0}&=0 \end{aligned}\right\}$$

Elegendő lesz, ha a továbbiakban például az I. rendszert veszszük alapúl.

Ha ennek két egyenletébe az i_{1_0} és az i_{2_0} fent (5) adott értékeit helyettezzük, lesz belőlök:

$$(\alpha_1\varepsilon_1 L_1+\alpha_2\varepsilon_1 M_0-\alpha_1 w_1)e^{-\varepsilon_1 t}+(\beta_1\varepsilon_2 L_1+\beta_2\varepsilon_2 M_0-\beta_1 w_1)e^{-\varepsilon_2 t}=0,$$
$$(\alpha_1\varepsilon_1 M_0+\alpha_2\varepsilon_1 L_2-\alpha_2 w_2)e^{-\varepsilon_1 t}+(\beta_1\varepsilon_2 M_0+\beta_2\varepsilon_2 L_2-\beta_2 w_2)e^{-\varepsilon_2 t}=0.$$

Mivel pedig ezek az egyenletek minden időpillanatban érvényesek, az $e^{-\varepsilon_1 t}$ és $e^{-\varepsilon_2 t}$ együtthatóinak zérussal egyenlőknek kell lenniök, azaz leszen:

$$\alpha_1(\varepsilon_1 L_1-w_1)+\alpha_2\varepsilon_1 M_0=0\,; \qquad \beta_1(\varepsilon_2 L_1-w_1)+\beta_2\varepsilon_2 M_0=0\,;$$
$$\alpha_1\varepsilon_1 M_0+\alpha_2(\varepsilon_1 L_2-w_2)=0\,; \qquad \beta_1\varepsilon_2 M_0+\beta_2(\varepsilon_2 L_2-w_2)=0.$$

Ezen egyenletek kifejezik az integratió α_1, β_1, α_2, β_2 állandóinak egymás között fennálló öszszefüggését.

E szerint szabad írnunk:

$$\mathrm{I}_{\alpha\beta}\;\ldots\;\left\{\begin{array}{ll} \alpha_2=-\dfrac{\varepsilon_1 L_1-w_1}{\varepsilon_1 M_0}\alpha_1\,; & \beta_2=-\dfrac{\varepsilon_2 L_1-w_1}{\varepsilon_2 M_0}\beta_1\,; \\ \alpha_1=-\dfrac{\varepsilon_1 L_2-w_2}{\varepsilon_1 M_0}\alpha_2\,; & \beta_1=-\dfrac{\varepsilon_2 L_2-w_2}{\varepsilon_2 M_0}\beta_2. \end{array}\right.$$

Így tetszés szerint fejezhető ki α_2, β_2, az α_1, β_1 által, vagy megfordítva.

A III. rendszerre nézve ezen egyenletek:

$$\mathrm{III}_{\alpha\beta}\;\ldots\;\left\{\begin{array}{ll} \alpha_2=-\dfrac{\varepsilon_1 \mathrm{L}_1-W}{\varepsilon_1 \mathrm{M}_1}\alpha_1\,; & \beta_2=-\dfrac{\varepsilon_2 \mathrm{L}_1-W}{\varepsilon_2 \mathrm{M}_1}\beta_1\,; \\ \alpha_1=-\dfrac{\varepsilon_1 \mathrm{L}_2-W}{\varepsilon_1 \mathrm{M}_2}\alpha_2\,; & \beta_1=-\dfrac{\varepsilon_2 \mathrm{L}_2-W}{\varepsilon_2 \mathrm{M}_2}\beta_2. \end{array}\right.$$

Hogy azonban ezen négy öszszefüggés közűl csak kettő független, ezt azonnal észreveszszük, ha az egymás alatt álló egyenleteket egymással szorozzuk; ered:

$$\varepsilon_1^2 M_0^2=(\varepsilon_1 L_1-w_1)(\varepsilon_1 L_2-w_2)\,; \qquad \varepsilon_2^2 M_0^2=(\varepsilon_2 L_1-w_1)(\varepsilon_2 L_2-w_2)\,;$$
$$\varepsilon_1^2 \mathrm{M}_1\mathrm{M}_2=(\varepsilon_1\mathrm{L}_1-W)(\varepsilon_1\mathrm{L}_2-W)\,; \qquad \varepsilon_2^2 \mathrm{M}_1\mathrm{M}_2=(\varepsilon_2\mathrm{L}_1-W)(\varepsilon_2\mathrm{L}_2-W).$$

Ezek az egyenletek identikusok az ε-nak fent (4) alatt adott meghatározó egyenletével.

Mivel így az α_1, β_1, α_2, β_2 négy állandó között *két* független öszszefüggés áll fenn, ezen állandók közűl csak kettő független egymástól.

A mi pedig illeti az I., II., III. rendszerek nem teljes egyenleteinek utolsóját, nevezetesen az

$$\varphi_0''+\varkappa^2\varphi_0'+\lambda^2(\varphi_0-\vartheta)=0,$$

egyenletet, ennek teljes megoldása írható

$$\varphi_0=\vartheta+\gamma_1 e^{-k_1 t}+\gamma_2 e^{-k_2 t}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

hol az $e^{-k_1 t}$ és $e^{-k_2 t}$ két partikuláris megoldásnak exponentiális kitevői eleget tartoznak tenni az:

$$k^2-\varkappa^2 k+\lambda^2=0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

egyenletnek, e szerint értékök a következő:

$$\left.\begin{array}{l} k_1=\frac{1}{2}\varkappa^2-\sqrt{\frac{1}{4}\varkappa^4-\lambda^2} \\ k_2=\frac{1}{2}\varkappa^2+\sqrt{\frac{1}{4}\varkappa^4-\lambda^2} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7a)$$

Az integrátió állandói, γ_1 és γ_2 általánosságban egymástól függetlenek.

A k_1 és k_2-ra nézve megjegyzendő, hogy a levegő ellenállása, a surlódás s í. t. következtében fellépő $\varkappa^2$ együttható közönséges körülmények között nagyon csekély, és még igen nagy ellenállásnál is csak mérsékelt értékű a λ^2 ellenében, 12. §.; e szerint a

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}\varkappa^4-\lambda^2}=\tfrac{1}{2}\nu^2\sqrt{-1} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (7b)$$

menynyiség az eszköz mozogható részének minden lengő mozgásánál imaginárius, és φ_0 írható:

$$\varphi_0=\vartheta+e^{-\frac{1}{2}\varkappa^2 t}\left\{\gamma_1 e^{-\sqrt{-1}\,\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda^2-\varkappa^4}\,t}+\gamma_2 e^{+\sqrt{-1}\,\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda^2-\varkappa^4}\,t}\right\} \quad \dots\dots \quad (8)$$

Ez egy egyszerűen csillapított lengés egyenlete, melynek lengési ideje (a fél periodus tartama):

és melynek logarithmikus decrementuma:

$$\left.\begin{aligned} T_0&=\frac{2\pi}{\sqrt{4\lambda^2-\varkappa^4}}=\frac{\pi}{\nu^2} \\ \Lambda_0&=\tfrac{1}{2}\varkappa^2 T_0 \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (9)$$

Jegyzet: A gyakorlatban majdnem sohasem előforduló kivételes esetben, midőn $\frac{1}{4}\varkappa^4=\lambda^2$, leszen a (6) egyenletből:

$$\varphi_0=\vartheta+(\gamma_1+\gamma_2 t)e^{-\frac{1}{2}\varkappa^2 t} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (6a)$$

A II. rendszer. Mivel a II. rendszer utolsó egyenlete az I. és III. rendszer utolsó egyenletével megegyezik, melyet épen fent megvizsgáltunk, hátra van még az $i_0'+\mathfrak{c}i_0=0$ egyenlet megvizsgálása.

Ennek teljes megoldása:

vagy, mivel a 22. §. szerint, $\mathfrak{c}=\dfrac{w}{L_0}$:

$$\left.\begin{aligned} i_0&=ae^{-\mathfrak{c}t} \\ i_0&=ae^{-\frac{w}{L_0}t} \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (10)$$

Evvel az electrodynamometer valamenynyi nem teljes egyenletének teljes integráljai advák.

29. §. *Az n-edik közelitésben felállított egyenletrendszerek teljes integrátiója.*

A 23. és 24. §§-ok értelmében az electrodynamometernek az n-edik közelítést még felölelő differentiál-egyenletei következőleg írhatók:

$$\text{(I) és (III)} \quad \dots \quad \left\{\begin{aligned} i_{1_n}''+\mathfrak{a}i_{1_n}'+\mathfrak{b}i_{1_n}&=E_1(t)+G_{1_{n-1}}(t)+\mathfrak{G}_{1_{n-1}}(t)=H_{1_{n-1}}(t), \\ i_{2_n}''+\mathfrak{a}i_{2_n}'+\mathfrak{b}i_{2_n}&=E_2(t)+G_{2_{n-1}}(t)+\mathfrak{G}_{2_{n-1}}(t)=H_{2_{n-1}}(t), \\ \varphi_n''+\varkappa^2\varphi_n'+\lambda^2(\varphi_n-\vartheta)&=(\eta_1 i_{2_n}+\xi_1)i_{1_n}+\Phi_{12_{n-1}}(t)+\mathfrak{F}_{12_{n-1}}(t)=\Omega_{12_{n-1}}(t) \end{aligned}\right.$$

$$\text{(II)} \quad \dots \quad \left\{\begin{aligned} i_n'+\mathfrak{c}i_n&=E(t)+G_{n-1}(t)+\mathfrak{G}_{n-1}(t)=H_{n-1}(t) \\ \varphi_n''+\varkappa^2\varphi_n'+\lambda^2(\varphi_n-\vartheta)&=\eta_1 i_n^2+\xi_1 i_n+\Phi_n(t)+\mathfrak{F}_n(t)=\Omega_{n-1}(t) \end{aligned}\right.$$

összehasonlítva a 27. §-ban említett typikus egyenleteket és azok megoldásait a megelőző §§-okban talált eredményekkel és az épen felírt egyenletekkel, a következőket veszszük észre:

Az I. és III. rendszerben az intensitás nem teljes egyenleteinek partikuláris megoldásai a 28. §. (3) egyenlete értelmében:

$$y_1=e^{-\varepsilon_1 t}\,, \quad y_2=e^{-\varepsilon_2 t};$$

Ebből folyik:

$$y_2\left(\frac{y_1}{y_2}\right)'=-(\varepsilon_1-\varepsilon_2)e^{-\varepsilon_1 t}\,; \quad y_1\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'=+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)e^{-\varepsilon_2 t}$$

Hasonlóan, az elongátió nem teljes egyenletének két partikuláris megoldása

$$y_1=e^{-k_1 t}\,, \quad y_2=e^{-k_2 t};$$

miből:

$$y_2\left(\frac{y_1}{y_2}\right)'=-(k_1-k_2)e^{-k_1 t}\,; \quad y_1\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'=+(k_1-k_2)e^{-k_2 t}.$$

Ezek után a 27. §. (3) és (4) egyenleteiben adott sémáját a teljes egyenlet teljes megoldásának az itt felírt két egyenletrendszerre közvetetlenül alkalmazhatjuk.

Ilyformán, a 28. §-ban részletezett viszonyok tekintetbe vételével, az n-edik közelítésben felállított I. és III. egyenletrendszerek teljes megoldásai számára találjuk:

$$\left.\begin{aligned} i_{1_n} &= \alpha_1 e^{-\varepsilon_1 t} + \beta_1 e^{-\varepsilon_2 t} + \frac{1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \left\{ e^{-\varepsilon_1 t} \int H_{1_{n-1}}(t) e^{+\varepsilon_1 t} dt - e^{-\varepsilon_2 t} \int H_{1_{n-1}}(t) e^{+\varepsilon_2 t} dt \right\} + \varDelta\alpha_1 e^{-\varepsilon_1 t} + \varDelta\beta_1 e^{-\varepsilon_2 t} \\ i_{2_n} &= \alpha_2 e^{-\varepsilon_1 t} + \beta_2 e^{-\varepsilon_2 t} + \frac{1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \left\{ e^{-\varepsilon_1 t} \int H_{2_{n-1}}(t) e^{+\varepsilon_1 t} dt - e^{-\varepsilon_2 t} \int H_{2_{n-1}}(t) e^{+\varepsilon_2 t} dt \right\} + \varDelta\alpha_1 e^{-\varepsilon_1 t} + \varDelta\beta_2 e^{-\varepsilon_2 t} \\ \varphi_n &= \vartheta + \gamma_1 e^{-k_1 t} + \gamma_2 e^{-k_2 t} + \frac{1}{k_2 - k_1} \left\{ e^{-k_1 t} \int \Omega_{12_{n-1}}(t) e^{+k_1 t} dt - e^{-k_2 t} \int \Omega_{12_{n-1}}(t) e^{+k_2 t} dt \right\} + \varDelta\varphi + \varDelta\gamma_1 e^{-k_1 t} + \varDelta\gamma_2 e^{-k_2 t} \end{aligned}\right\} (\mathrm{I}_a) \text{ és } (\mathrm{III}_a)$$

Itt is az $\varDelta\alpha_1, \varDelta\beta_1, \varDelta\alpha_2, \varDelta\beta_2, \varDelta\gamma_1, \varDelta\gamma_2$ menynyiségek jelentik az integrátió azon állandóit, melyek a magasabb rendű közelítéseknél fellépnek, továbbá $\varDelta\varphi$ azon részét a φ-nek, mely az i_{1_n}, i_{2_n} kifejezéseiben fellépő, $\varDelta\alpha_1, \varDelta\beta_1, \varDelta\alpha_2, \varDelta\beta_2$-val szorzott tagok folytán a φ-hez hozzálép.

A II. rendszerben a dolog valamivel egyszerűbb, ugyanis, az intensitás egyenletében csak T_1 helyébe $\mathrm{c} = \frac{w}{L_0}$, és T helyébe $H_{n-1}(t)$ teendő; a kitérés egyenlete ugyanaz, mint az I. és III. rendszerben, kivéve az $\Omega(t)$ indexét.

Ezek értelmében, a 27. §. (4) sémája alapján, az n-edik közelítésben felállított II. egyenletrendszernek teljes megoldása lesz:

$$\left.\begin{aligned} i_n &= \alpha e^{-\mathrm{c}t} + e^{-\mathrm{c}t} \int H_{n-1}(t) e^{+\mathrm{c}t} dt + \varDelta\alpha e^{-\mathrm{c}t} \\ \varphi_n &= \vartheta + \gamma_1 e^{-k_1 t} + \gamma_2 e^{-k_2 t} + \frac{1}{k_2 - k_1} \left\{ e^{-k_1 t} \int \Omega_{n-1}(t) e^{+k_1 t} dt - e^{-k_2 t} \int \Omega_{n-1}(t) e^{+k_2 t} dt \right\} + \varDelta\varphi + \varDelta\gamma_1 e^{-k_1 t} + \varDelta\gamma_2 e^{-k_2 t} \end{aligned}\right\} (\mathrm{II}_a)$$

Itt is jelentik a $\varDelta\alpha, \varDelta\gamma_1, \varDelta\gamma_2$ az integrátió azon állandóit, melyek a magasabb rendű közelítések számításánál hozzálépnek és $\varDelta\varphi$ a φ-nek a $\varDelta\alpha$ folytán hozzájáruló részét.

30. §. *Az integrátió tényleges kivitelénél követendő eljárás.*

A megelőző §-ban symbolikusan felírt megoldások már önmagok szerkezetében mutatják, milyen eljárás alkalmazandó az egyenletrendszerek tényleges, successív integrátiójánál.

Itt azonban nehány megjegyzés nem látszik fölöslegesnek.

Ugyanis a 25. §-ban az *első közelítésben felállított rendszerek* a $G_1(t), G_2(t), \Phi_{12}(t), \mathfrak{G}_1(t), \mathfrak{G}_2(t), \mathfrak{F}_{12}(t), G(t), \mathfrak{G}(t), \Phi(t), \mathfrak{F}(t)$ függvényeket *egyáltalában* nem tartalmazzák, mert ezek az első közelítésnél elhanyagolhatók.

E szerint az első közelítésben lesz a 22. és 29. §§-ok I., II., III. rendszereiben:

$$\left.\begin{aligned} H_{1_0}(t) &= +E_1(t), \\ H_{2_0}(t) &= +E_2(t), \\ \Omega_{12_0}(t) &= \eta_1 i_{1_1} i_{2_1} + \xi_1 i_{1_1} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} H_0(t) &= +E(t) \\ \Omega_0(t) &= \eta_1 i_1^2 + \xi_1 i_1 \end{aligned}\right\}$$

Ámde, az I. és III. rendszerben $E_1(t), E_2(t)$, e szerint $H_{1_0}(t), H_{2_0}(t)$ az időnek adott függvényei, 22. §., ezért is csak a 27. §-ban és a megelőző §-ban jelelt quadraturát kell végezni, hogy az intensitások első közelítéseit, i_{1_1}, i_{2_1}-t az időnek explicit függvényei gyanánt lehessen kifejezni.

Ezen értékek segélyével képezzük az $\Omega_{12_0}(t) = \eta_1 i_{1_1} i_{2_1} + \xi_1 i_{1_1}$ függvényt, mely ekként ismeretes lesz, és végezzük a megelőző §-ban jelelt quadraturákat, hogy az elongátió első közelítését, φ_1-et lehessen nyerni.

A II. rendszerben $E(t)$ szintén az időnek ismeretes függvénye, 22. §., kiszámítva a 27. és a megelőző §§-ban jelelt quadraturát, nyerjük az intensitás első közelítését, i_1-et, mint az időnek explicit függvényét. Ezen értéket helyettezve az $\Omega_0(t) = \eta_1 i_1^2 + \xi_1 i_1$ függvénybe, és az utolsó egyenlet quadraturáit kiszámítva, nyerjük a kitérés első közelítését, φ_1-et.

Evvel az első közelítésben felállított egyenletek teljes integrátiója megtörtént.

A magasabb rendű megoldások ugyanezen eljárás szerint történnek, de mindenkor a megelőző alsóbb rendű megközelítés megoldásának ismeretesnek kell lennie.

A $H(t)$ és $\Omega(t)$ megfelelő értékeit a 22. és 26. §§-ok formula-rendszerei szolgáltatják.

HARMADIK RÉSZ.

1. Az electrodynamometer egyenletrendszerei, midőn az áramintensitásoknak a mozgástól függő részei mint variabilisek vannak bevezetve.

31. §. *A különbségi egyenletrendszerek czélja általánosságban.*

A 27—30. §§-okban alkalmazott módszere a perameterek variatiójának a probléma minden egyes speciális esetéhez fog ugyan símulni és mindenesetre az egyenletrendszereknek a kivánt pontosságig terjedő teljes megoldását fogja szolgáltatni; mindazonáltal kitűnik, hogy az így nyert integrálok, külső alakjoknál fogva, nem mindig alkalmasak a megvizsgálandó jelenség néhány speciális és fontos sajátságainak előnyös és könnyen taglalható módon való előtüntetésére.

Azért nem látszik fölöslegesnek, az electrodynamometer problemáját még kissé más módon is tárgyalni, mely mód a megelőző részben alkalmazott módszer kiegészítésére igen alkalmas.

Ugyanis, azonnal észreveszszük, hogy a 25., 26., 29. §§-okban különböző közelítésben felállított egyenletrendszerekben, az áramintensitások egyenletei az elongatió egyenleteitől függetlenek, míg megfordítva a kitérés egyenlete függ a fölötte írt intensitás-egyenlet megoldásától.

A következőkben a különböző közelítésben felállított egyenletek más alakba lesznek hozva, és pedig az által, hogy az áramintensitások helyett a tényleges áramintensitás és annak első közelítésbeli különbségét vezetjük be, mely utóbbit, a 25. §-ban bevezetett jelölések megtartása mellett, következőképen jelöljük:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Az I. és III. rendszerben:} & \left.\begin{array}{l} i_1 - i_{1_1} = j_1 \\ i_2 - i_{2_1} = j_2 \end{array}\right\}, \\ \text{A II. rendszerben:} & i - i_1 = j\,. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

A $j_1, j_2; j$, menynyiségek egy fokkal magasabb rendűek, mint az $i_1, i_1, i_2, i_{2_1}; i, i_1$ menynyiségek.

Most vegyük tekintetbe, hogy az intensitás egyenletei első közelítésére nézve a 20., 21., 25. §§-ok szerint áll:

$$\begin{array}{llll} \text{I:} & L_1 i'_{1_1} + M_0 i'_{2_1} + w_1 i_{1_1} - E_1 = 0\,, & \text{III:} & \mathbf{L}_1 i'_{1_1} + \mathbf{M}_1 i'_{2_1} + W i_{1_1} - \mathbf{E}_1 = 0\,, \\ & M_0 i'_{1_1} + L_2 i'_{2_1} + w_2 i_{2_1} - E_2 = 0\,, & & \mathbf{M}_2 i'_{1_1} + \mathbf{L}_2 i'_{2_1} + W i_{2_1} - \mathbf{E}_2 = 0\,, \end{array}$$

vagy a 25. §. transformatiója szerint:

$$\begin{array}{ll} \text{I és III:} & i''_{1_1} + \mathfrak{a} i'_{1_1} + \mathfrak{b} i_{1_1} = E_1(t)\,, \\ & i''_{2_1} + \mathfrak{a} i'_{2_1} + \mathfrak{b} i_{2_1} = E_2(t)\,; \\ \text{II:} & i'_1 + \mathfrak{c} i_1 = E(t)\,. \end{array}$$

Ezen egyenleteket a 29. és 30. §§-ok értelmében a parameterek variatiója módszere segélyével megoldottaknak tekintjük.

Ha azután az intensitás *általános* egyenleteibe, 15. §., i_1, i_2, i, helyébe a velök egyenértékű összegeket, $i_{1_1}+j_1$, $i_{2_1}+j_2$, i_1+j-t, helyettezzük és belőlök az itt felírt egyenleteket *levonjuk*, akkor csak magasabb rendű tagok maradnak meg és ily formán nyerünk j_1, j_2, j számára összszefüggéseket, melyeket *különbségi egyenletek*nek lehet nevezni és melyek a következő §§-ok vizsgálatai tárgyát fogják képezni.

32. §. *A különbségi egyenletek képzése.*

Mindenek előtt képezzük a 15. és 22. §§-ok általános egyenleteiben fellépő $i_1\omega$, $i_2\omega$, $i\omega$, Q tagokat. A 13. §. (4) egyenlete szerint lesz:

$$
\begin{aligned}
(i_1\omega)' &= K\left\{(i_{1_1}+j_1)\,(\eta_1\varphi+\tfrac{1}{2}\eta_2\varphi^2+\ldots)\right\}' = K\eta_1(i''_{1_1}\varphi+i_{1_1}\varphi')+\text{ magasabb tagok,}\\
(i_2\omega)' &= K\left\{(i_{2_1}+j_2)\,(\eta_1\varphi+\tfrac{1}{2}\eta_2\varphi^2+\ldots)\right\}' = K\eta_1(i''_{2_1}\varphi+i_{2_1}\varphi')+\text{ magasabb tagok,}\\
Q' &= K\left\{\xi_1\varphi+\tfrac{1}{2}\xi_2\varphi^2+\ldots\right\}' = K\xi_1\varphi'+\text{ magasabb tagok,}\\
(i\omega)' &= K\left\{(i_1+j)\,(\eta_1\varphi+\tfrac{1}{2}\eta_2\varphi^2+\ldots)\right\}' = K\eta_1(i''_1\varphi+i_1\varphi')+\text{ magasabb tagok.}
\end{aligned}
$$

Ugyanígy leszen a 22. §. szerint:

$$
\begin{aligned}
\Omega'_1 &= K\left\{(w_2+w_3)\boldsymbol{(}\eta_1(i''_{2_1}\varphi+i_{2_1}\varphi')+\xi_1\varphi'\boldsymbol{)}+w_3\eta_1\,(i''_{1_1}\varphi+i_{1_1}\varphi')\right\}+\text{ magasabb tagok,}\\
\Omega'_2 &= K\left\{w_3\boldsymbol{(}\eta_1(i''_{2_1}\varphi+i_{2_1}\varphi')+\xi_1\varphi'\boldsymbol{)}+(w_1+w_3)\eta_1\,(i''_{1_1}\varphi+i_{1_1}\varphi')\right\}+\text{ magasabb tagok.}
\end{aligned}
$$

Írjuk rövidség kedvéért:

Az I. rendszerben:

$$
\begin{aligned}
-K\eta_1 i''_{2_1} &= R_1\,;\\
-K(\eta_1 i_{2_1}+\xi_1) &= S_1\,;\\
-K\eta_1 i''_{1_1} &= R_2\,;\\
-K\eta_1 i_{1_1} &= S_2\,;\\
(i_2\omega+Q)'-K\left\{\eta_1(i_{2_1}\varphi)'+\xi_1\varphi'\right\} &= -U_1(t)\,;\\
(i_1\omega)-K\eta_1(i_{1_1}\varphi)' &= -U_2(t)\,;
\end{aligned}
$$

A III. rendszerben:

$$
\begin{aligned}
-K\eta_1\left\{(w_2+w_3)i''_{2_1}+w_3 i''_{1_1}\right\} &= R_1\,,\\
-K\left\{\eta_1((w_2+w_3)i_{2_1}+w_3 i_{1_1})+\xi_1\right\} &= S_1\,,\\
-K\eta_1\left\{(w_3 i''_{2_1}+(w_1+w_3)i''_{1_1}\right\} &= R_2\,,\\
-K\left\{\eta_1(w_3 i_{2_1}+(w_1+w_3)i_{1_1})+\xi_1\right\} &= S_2\,.\\
\Omega'_1-K\left\{(w_2+w_3)\boldsymbol{(}\eta_1(i_{2_1}\varphi)'+\xi_1\varphi'\boldsymbol{)}+w_3\eta_1\,(i_{1_1}\varphi)'\right\} &= -U_1(t),\\
\Omega_2-K\left\{w_3\boldsymbol{(}\eta_1(i_{2_1}\varphi)'+\xi_1\varphi'\boldsymbol{)}+(w_1+w_3)\eta_1\,(i_{1_1}\varphi)'\right\} &= -U_2(t).
\end{aligned}
$$

Ha most az intensitás általános egyenleteiből, 15. és 22. §§., levonjuk a megelőző §-ban felírt egyenleteit az első közelítésnek, származik, az épen bevezetett jelölések tekintetbe vételével:

$$
\text{I:}\quad
\begin{aligned}
L_1 j'_1+M_0 j'_2+w_1 j_1 &= R_1\varphi+S_1\varphi'+U_1(t)\,,\\
M_0 j'_1+L_2 j'_2+w_2 j_2 &= R_2\varphi+S_2\varphi'+U_2(t)\,.
\end{aligned}
\qquad
\text{III:}\quad
\left.
\begin{aligned}
\mathbf{L}_1 j'_1+\mathbf{M}_1 j'_2+W j_1 &= R_1\varphi+S_1\varphi'+U_1(t)\\
\mathbf{M}_2 j'_1+\mathbf{L}_2 j'_2+W j_2 &= R_2\varphi+S_2\varphi'+U_2(t)
\end{aligned}
\right\}
$$

Ha ellenben a 23. §. transformált egyenletei bal részeibe az i_1, i_2, i, helyébe az $i_{1_1}+j_1$, $i_{2_1}+j_1$, i_1+j összszegeket helyettezzük és a 25. §-ban írt első közelítésbeli egyenleteket levonjuk a nevezett transformált általános egyenletekből, akkor marad:

$$
\text{(I) és (III)}\;\ldots\;
\left\{
\begin{aligned}
j''_1+\mathfrak{a}j'_1+\mathfrak{b}j_1 &= G_1(t)+\mathfrak{G}_1(t)\\
j''_2+\mathfrak{a}j'_2+\mathfrak{b}j_2 &= G_2(t)+\mathfrak{G}_2(t)\\
\varphi''+\varkappa^2\varphi'+\lambda^2(\varphi-\vartheta) &= \eta_1 i_{1_1}i_{2_1}+\xi_1 i_{1_1}+\eta_1(i_{1_1}j_2+i_{2_1}j_1)+\xi_1 j_1+\eta_1 j_1 j_2+\Phi_{12}(t)+\mathfrak{F}_{12}(t).
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\text{(II)}\;\ldots\ldots\;
\left\{
\begin{aligned}
j'+\mathfrak{c}j &= G(t)+\mathfrak{G}(t)\\
\varphi''+\varkappa^2\varphi'+\lambda^2(\varphi-\vartheta) &= \eta_1 i_1^2+\xi_1 i_1+2\eta_1 i_1 j+\xi_1 j+\eta_1 j^2+\Phi(t)+\mathfrak{F}(t).
\end{aligned}
\right.
$$

A mi illeti a $G_1(t)$, $G_2(t)$, $\mathfrak{G}_1(t)$, $\mathfrak{G}_2(t)$, $\Phi_{12}(t)$, $\mathfrak{F}_{12}(t)$; $G(t)$, $\mathfrak{G}(t)$, $\Phi(t)$, $\mathfrak{F}(t)$, függvények értékeit, megjegyzendő, hogy ezeknek explicit kifejezéseiben, 22. §., az $(i_1\omega)'$, $(i_2\omega)'$, Q', $(i\omega)'$, Ω'_1, Ω'_2, menynyiségek fentírt értékei segélyével, ugyanily helyettezés eszközlendő.

Ha ezt tényleg teszszük, és az egyenletekben fellépő harmad- és magasabb rendű tagok összszegét rendre jelöljük: $F_1(t)$, $F_2(t)$, $\Psi_{12}(t)$; $F(t)$, $\Psi(t)$-vel, akkor a fentnevezett függvényeknek legalsóbb tagjaival explicite előtüntetett értékei írhatók (V. ö. még a 26. §. (1), (2), (3) egyenleteit):

$$\text{I:}\quad G_1(t)+\mathfrak{G}_1(t)=-\mathfrak{d}\{\eta_1(w_2(i_{2},\varphi)'-M_0(i_{1},\varphi)''+L_2(i_{2},\varphi)'')+\xi_1(w_2\varphi'+L_2\varphi'')\}+F_1(t),$$
$$G_2(t)+\mathfrak{G}_2(t)=-\mathfrak{d}\{\eta_1(w_1(i_{1},\varphi)'-M_0(i_{2},\varphi)''+L_1(i_{1},\varphi)'')-\xi_1 M_0\varphi''\}+F_2(t).$$

$$\text{III:}\quad G_1(t)+\mathfrak{G}_1(t)=-\mathfrak{d}\{\eta_1[W((w_2+w_3)(i_{2},\varphi)'+w_3(i_{1},\varphi)')-\mathbf{M}_1(w_3(i_{2},\varphi)''+(w_1+w_3)(i_{1},\varphi)'')+$$
$$\mathbf{L}_2((w_2+w_3)(i_{2},\varphi)''+w_3(i_{1},\varphi)'')]+\xi_1[W(w_2+w_3)\varphi'-\mathbf{M}_1 w_3\varphi''+\mathbf{L}_2(w_2+w_3)\varphi'']\}+F_1(t),$$
$$G_2(t)+\mathfrak{G}_2(t)=-\mathfrak{d}\{\eta_1[W(w_3(i_{2},\varphi)'+(w_1+w_3)(i_{1},\varphi)')-\mathbf{M}_2((w_2+w_3)(i_{2},\varphi)''+w_3(i_{1},\varphi)'')+$$
$$\mathbf{L}_1(w_3(i_{2},\varphi)''+(w_1+w_3)(i_{1},\varphi)'')]+\xi_1[Ww_3\varphi'-\mathbf{M}_2(w_2+w_3)\varphi''+\mathbf{L}_1 w_3\varphi'']\}+F_2(t).$$

Továbbá közösen:

I és III:
$$\Phi_{12}(t)=+\eta_2 i_{1_1} i_{2_1}\varphi-\tfrac{1}{2}a_2\varphi^2-\tfrac{1}{2}b_2\varphi'^2+\Psi_{12}(t)-\eta_1 j_1 j_2 .$$

Végre a II. rendszerben:

$$\text{II:}\quad G(t)=-\frac{K}{L_0}\{\eta_1(i_1\varphi)'+\xi_1\varphi'\}+F(t),$$
$$\Phi(t)=+\eta_2 i_1^2\varphi-\tfrac{1}{2}a_2\varphi^2-\tfrac{1}{2}b_2\varphi'^2+\Psi(t)-\eta_1 j^2.$$

33. §. *A különbségi egyenletek rendszerei, midőn az electrodynamometer mozogható része symmetrikus.*

A mérő eszközöknél majdnem kivétel nélkül fellépő esetben, midőn az electrodynamometer mozogható része *symmetrikus* szerkezetű, 19. §. 4. pontja, az $\frac{1}{2}a_2\varphi^2$ tag *harmadrendű* leszen, míg $\frac{1}{2}b_2\varphi^2$ elenyészik; az első tagot a megelőző §. $\Psi_{12}(t)$ és $\Psi(t)$ függvényeiben lévőnek tekintjük.

Ezért ezen tagok ezentúl explicite nem fognak előfordulni.

Fejtessenek ki most a megelőző §-ban felírt legalsóbb tagjai az egyenletek jobb oldalainak oly formán, hogy az (i_{1},φ), (i_{2},φ), $(i_1\varphi)$ szorzatok differentiál-quotiensei explicite képeztetnek és a tagok a φ különböző differentiál-quotiensei szerint rendeztetnek.

Célszerűnek látszik a jelölt operátiók végzése után a φ, φ', φ'' együtthatói számára a következő jelöléseket bevezetni:

Az I. rendszerben:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{K}{L_1L_2-M_0^2}&=\mathfrak{d};\\
-\mathfrak{d}\eta_2\,(w_2 i''_{2_1}-M_0 i''_{1_1}+L_2 i''_{2_1})&=A_1,\\
-\mathfrak{d}\,[\eta_1\,(w_2 i_{2_1}-2M_0 i'_{1_1}+2L_2 i'_{2_1})+\xi_1 w_2]&=B_1,\\
-\mathfrak{d}[\eta_1\,(-M_0 i_{1_1}+L_2 i_{2_1})+\xi_1 L_2]&=C_1,\\
-\mathfrak{d}\eta_1(w_1 i'_{1_1}-M_0 i''_{2_1}+L_1 i''_{1_1})&=A_2,\\
-\mathfrak{d}\eta_1(w_1 i'_{1_1}-2M_0 i'_{2_1}+2L_1 i'_{1_1})&=B_2,\\
-\mathfrak{d}\,[\eta_1(-M_0 i_{2_1}+L_1 i_{1_1})-\xi_1 M_0]&=C_2.
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(1)$$

A III. rendszerben:

$$\frac{K}{\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2-\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2}=\mathfrak{d}$$

$$\left.\begin{aligned}
-\mathfrak{d}\eta_1[W((w_2+w_3)i'_{2_1}+w_3 i'_{1_1})-\mathbf{M}_1(w_3 i''_{2_1}+(w_1+w_3)i''_{1_1})+\mathbf{L}_2((w_2+w_3)i''_{2_1}+w_3 i''_{1_1})]&=A_1,\\
-\mathfrak{d}\{\eta_1[W((w_2+w_3)i_{2_1}+w_3 i_{1_1})-2\mathbf{M}_1(w_3 i'_{2_1}+(w_1+w_3)i'_{1_1})+2\mathbf{L}_2((w_2+w_3)i'_{2_1}+w_3 i'_{1_1})]+\xi_1 W(w_2+w_3)\}&=B_1,\\
-\mathfrak{d}\{\eta_1[-\mathbf{M}_1(w_3 i_{2_1}+(w_1+w_3)i_{1_1})+\mathbf{L}_2((w_2+w_3)i_{2_1}+w_3 i_{1_1})]+\xi_1[-\mathbf{M}_1 w_3+\mathbf{L}_2(w_2+w_3)]\}&=C_1,\\
-\mathfrak{d}\eta_1[W(w_3 i'_{2_1}+(w_1+w_3)i'_{1_1})-\mathbf{M}_2((w_2+w_3)i''_{2_1}+w_3 i''_{1_1})+\mathbf{L}_1(w_3 i''_{2_2}+(w_1+w_3)i''_{1_1})]&=A_2,\\
-\mathfrak{d}\{\eta_1[W(w_3 i_{2_1}+(w_1+w_3)i_{1_1})-2\mathbf{M}_2((w_2+w_3)i'_{2_1}+w_3 i'_{1_1})+2\mathbf{L}_1(w_3 i'_{2_1}+(w_1+w_3)i'_{1_1})]+\xi_1 Ww_3\}&=B_2,\\
-\mathfrak{d}\{\eta_1[-\mathbf{M}_2((w_2+w_3)i_{2_1}+w_3 i_{1_1})+\mathbf{L}_1(w_3 i_{2_1}+(w_1+w_3)i_{1_1})]+\xi_1[-\mathbf{M}_2(w_2+w_3)+\mathbf{L}_1 w_3]\}&=C_2.
\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Továbbá közösen az I. és III. rendszerben:

$$\left.\begin{aligned} \lambda^2\vartheta+\eta_1 i_{1_1} i_{2_1}+\xi_1 i_{1_1} &= \Theta_{12} \\ \lambda^2-\eta_2 i_{1_1} i_{2_1} &= \mu^2{}_{12} \\ \eta_1 i_{2_1}+\xi_1 &= D_1 \\ \eta_1 i_{1_1} &= D_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Végre a II. rendszerben:

$$\frac{K}{L_0}=\mathfrak{e}$$

$$\left.\begin{aligned} -\mathfrak{e}\eta_1 i_1'' &= A \\ -\mathfrak{e}(\eta_1 i_1+\xi_1) &= B \\ \lambda^2\vartheta+\eta_1 i_1^2+\xi_1 i_1 &= \Theta \\ \lambda^2-\eta_2 i_1^2 &= \mu^2 \\ 2\eta_1 i_1+\xi_1 &= D \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Helyettezve ezeket a rövidítéseket a megelőző §. (I), (II), (III) egyenletrendszereibe, és tekintetbe véve a symmetria következtében fellépő egyszerűsítéseket, származik:

$$\text{(I) és (III)} \ \ldots\ldots \left\{\begin{aligned} j_1''+\mathfrak{a}j_1'+\mathfrak{b}j_1 &= A_1\varphi+B_1\varphi'+C_1\varphi''+F_1(t) \\ j_2''+\mathfrak{a}j_2'+\mathfrak{b}j_2 &= A_2\varphi+B_2\varphi'+C_2\varphi''+F_2(t) \\ \varphi''+\varkappa^2\varphi'+\mu_{12}^2\varphi &= \Theta_{12}+D_1 j_1+D_2 j_2+\Psi_{12}(t) \end{aligned}\right.$$

$$\text{(II)} \ \ldots\ldots\ldots \left\{\begin{aligned} j'+\mathfrak{c}j &= A\varphi+B\varphi'+F(t) \\ \varphi''+\varkappa^2\varphi'+\mu^2\varphi &= \Theta+Dj+\Psi(t) \end{aligned}\right.$$

Ezen egyenletekhez még a következő megjegyzéseket fűzzük:

Az i_{1_1}, i_{2_1}, i_1 az intensitás egyenletei első megközelítésének, 25. §., ismertnek tekintett megoldásai, 25. §., e szerint a fent bevezetett $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, \Theta_{12}, \mu_{12}^2, D_1, D_2, A, B, \Theta, \mu^2, D$ menynyiségek az időnek ismeretes függvényei gyanánt tekintendők.

Továbbá a $F_1(t)$, $F_2(t)$, $\Psi_{12}(t)$, $F(t)$, $\Psi(t)$ menynyiségek a harmad- és magasabb rendű tagokat tartalmazzák.

Ha ezen függvényeket elhanyagolnók, akkor az egyenletrendszerek *második közelítését* nyernők, de valamivel más alakban, mint a 26. §. I., II., III. egyenletrendszereiben.

2. A különbségi egyenletrendszerek transformátiója és integrátiója.

34. §. *Az átalakítás czélja és eredménye.*

A megelőző § I., II., III. egyenletei analog transformátiónak vethetők alá, mint a 22. §. I. és III. rendszereinek intensitás-egyenletei.

Ismételt differentiálás és helyettezés által azt érhetni el, hogy a külömbségi egyenlet mindegyikének bal oldalán csak *egy* variabilisnek differentiál-quotiensei lépjenek fel, míg az intensitás egyenletei jobb oldalán fellépő tagok az intensitás-külömbségekkel egyenlő rendűek, vagy még azoknál magasabb rendűek is, továbbá, hogy a kitérés egyenletei jobb oldalán fellépő tagok rendje a kitérések-ével egyenlő vagy magasabb rendű.

Az átalakítások a helyesen alkalmazott operatiók egy sorozatából állanak; itt azokat részleteikben nem fogjuk végezni, mivel azok, az egyenletek általános alakjánál fogva, felette körülményesek volnának, és bennünket még sem menthetnének fel az alól, hogy a transformatiót minden egyes, reális esetben, végig kelljen számítanunk.

Elegendő lesz, ha ezen a helyen az I., II., III. rendszerek transformatiója után származó különbségi egyenletek *általános alakját* felírjuk; ez lesz:

$$\text{(I) és (III)} \dots \left\{ \begin{array}{l} j_1'''' + \mathbf{A}_1 j_1''' + \mathbf{B}_1 j_1'' + \Gamma_1 j_1' + \varDelta_1 j_1 = \mathbf{H}_{10}\theta_{12}'' + \mathbf{H}_{11}\theta_{12}' + \mathbf{H}_{12}\theta_{12} + \mathbf{S}_{11}(t) \\ j_2'''' + \mathbf{A}_2 j_2''' + \mathbf{B}_2 j_2'' + \Gamma_2 j_2' + \varDelta_2 j_2 = \mathbf{H}_{20}\theta_{12}'' + \mathbf{H}_{21}\theta_{12}' + \mathbf{H}_{22}\theta_{12} + \mathbf{S}_{22}(t) \\ \varphi'''' + a_{12}\varphi''' + b_{12}\varphi'' + c_{12}\varphi' + d_{12}\varphi = -\theta_{12}'' - \mathbf{Z}_1\theta_{12}' - \mathbf{Z}_2\theta_{12} + T_{12}(t) \end{array} \right.$$

$$\text{(II)} \dots \left\{ \begin{array}{l} j''' + \mathbf{A}j'' + \mathbf{B}j' + \Gamma j = -B\theta' + \mathbf{H}\theta + \mathbf{S}(t) \\ \varphi''' + a\varphi'' + b\varphi' + c\varphi = \theta' + \mathbf{Z}\theta + T(t) \end{array} \right.$$

Ezen egyenletekben θ_{12} és θ, B, a már a megelőző §. (3) és (4) egyenletébe bevezetett menynyiségeket, ellenben $\mathbf{H}_{10}$, $\mathbf{H}_{11}$, $\mathbf{H}_{12}$, $\mathbf{H}_{20}$, $\mathbf{H}_{21}$, $\mathbf{H}_{22}$, $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{Z}$ oly együtthatókat jelentenek, melyek a megelőző § különbségi egyenleteinek A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, D_1, D_2, $\varkappa^2$, μ_{12}^2, együtthatói és azok differentiál-quotienseiből képezvék és e szerint ismereteseknek tekinthetők, végre $\mathbf{S}_{11}(t)$, $\mathbf{S}_{22}(t)$, $T_{12}(t)$, $\mathbf{S}(t)$, $T(t)$ függvények a megfelelő egyenletek harmad- és magasabb rendű tagjainak összegét.

Ha csak a *második* közelítést kivánjuk tárgyalni, akkor ezen utóbbi függvények elhanyagolandók.

E szerint a transformatió eredményét következőleg fejezhetni ki:

Az I. és III. rendszer különbségi egyenletei a *második közelítésben* visszavezethetők egymástól független három egyenletre, melyek mindegyike, általánosságban véve, egy *első fokú, negyedrendű, változó együtthatókkal* biró teljes differentiál-egyenlet.

A II. rendszer különbségi egyenletei a *második közelítésben* egymástól független két egyenletre vezethetők vissza, melyek mindegyike, általánosságban, *első fokú, harmadrendű, változó együtthatókkal* biró teljes differentiál-egyenlet.

35. §. *A második közelítés különbségi egyenleteinek integrátiója.*

Hogy a különbségi egyenleteket a második közelítésben lehessen integrálni, alkalmazzuk a már a 27. §-ban használt módszerét a parameterek variatiójának.

A különbségi egyenletek typusa, mint észreveszszük, a következő:

Az I. és III. rendszerre nézve:

$$y'''' + T_1 y''' + T_2 y'' + T_3 y' + T_4 y = T \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

A II. rendszerre nézve:

$$z''' + T_1 z'' + T_2 z' + T_3 z = T \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

hol a T, T_1, ... az időnek ismeretes függvényei.

A nevezett módszer eljárása értelmében, 27. §., ezen egyenleteket akként integráljuk, hogy először is az

$$y'''' + T_1 y''' + T_2 y'' + T_3 y' + T_4 y = 0;$$
$$z''' + T_1 z'' + T_2 z' + T_3 z = 0$$

nem teljes egyenletek megoldásait keressük, és azután a parameterek variatiója segélyével a teljes egyenletek integrátióját végezzük.

Jelölje most: $y_1, y_2, y_3, y_4; z_1, z_2, z_3$ a két typikus egyenlet partikuláris megoldásait. (V. ö. az alant következő megjegyzést), akkor a nem teljes egyenletek teljes megoldása:

$$\left.\begin{aligned} y&=c_1y_1+c_2y_2+c_3y_3+c_4y_4 \\ z&=c_1z_1+c_2z_2+c_3z_3 \end{aligned}\right\},$$

hol a c mennyiségek állandókat jelentenek, melyek a két typusban különböző értékűek.

Ha ezeket a partikuláris megoldásokat ismereteseknek tételezzük fel és azután a parameterek variatiója módszerét alkalmazzuk, akkor a teljes typusok teljes megoldásának alakja a következő:

$$Y=C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3+C_4y_4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$Z=C_1z_1+C_2z_2+C_3z_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

hol a C együtthatók értéke a két typusban különböző és az időtől függ.

A parameterek variatiója eljárásának megfelelőleg, a két typikus egyenletre nézve még a következő összefüggések állanak fenn, ha rövidség kedvéért teszszük: $Y=\sum_1^4 C_ny_n$, $Z=\sum_1^3 C_nz_n$:

Az I. és III. rendszerben:

$$\begin{aligned} Y&=\sum C_ny_n, & & \\ \frac{dY}{dt}&=\sum C_n\frac{dy_n}{dt}, & 0&=\sum\frac{dC_n}{dt}y_n, \\ \frac{d^2Y}{dt^2}&=\sum C_n\frac{d^2y_n}{dt^2}, & 0&=\sum\frac{dC_n}{dt}\frac{dy_n}{dt}, \\ \frac{d^3Y}{dt^3}&=\sum C_n\frac{d^3y_n}{dt^3}, & 0&=\sum\frac{dC_n}{dt}\frac{d^2y_n}{dt^2}, \\ \frac{d^4Y}{dt^4}&=\sum C_n\frac{d^4y_n}{dt^4}+T, & T&=\sum\frac{dC_n}{dt}\frac{d^3y}{dt^3}. \end{aligned}$$

A II. rendszerben:

$$\begin{aligned} Z&=\sum C_nz_n, & & \\ \frac{dZ}{dt}&=\sum C_n\frac{dz_n}{dt}, & 0&=\sum\frac{dC_n}{dt}z_n, \\ \frac{d^2Z}{dt^2}&=\sum C_n\frac{d^2z_n}{dt^2}, & O&=\sum\frac{dC_n}{dt}\frac{dz_n}{dt}, \\ \frac{d^3Z}{dt^3}&=\sum C_n\frac{d^3z_n}{dt^3}+T, & T&=\sum\frac{dC_n}{dt}\frac{d^2z_n}{dt^2}. \end{aligned}$$

A két alak mindegyikének jobb csoportja azokat az egyenleteket tartalmazza, melyek a C_n együtthatónak az idő szerint képezett differentiál-quotiensei meghatározására szolgálnak.

Ezeket most explicite írjuk:

Az I. és III. rendszerben:

$$\left.\begin{aligned} C'_1y_1+C'_2y_2+C'_3y_3+C'_4y_4&=0 \\ C'_1y'_1+C'_2y'_2+C'_3y'_3+C'_4y'_4&=0 \\ C'_1y''_1+C'_2y''_2+C'_3y''_3+C'_4y''_4&=0 \\ C'_1y'''_1+C'_2y'''_2+C'_3y'''_3+C'_4y'''_4&=T \end{aligned}\right|$$

A II. rendszerben:

$$\left.\begin{aligned} C'_1z_1+C'_2z_2+C'_3z_3&=0 \\ C'_1z'_1+C'_2z'_2+C'_3z'_3&=0 \\ C'_1z''_1+C'_2z''_2+C'_3z''_3&=T \end{aligned}\right\}$$

Mivel, miként már fent említettük, az $y_1, y_2, y_3, y_4; z_1, z_2\, z_3$ partikuláris integrálok ismereteseknek tételeztetnek fel, a felírt lineár egyenletek teljesen elegendőek arra nézve, hogy a C'_n quotienseket minden rendszerben meghatározhassuk.

Jelentse ugyanis az I. és III. rendszerben Δ az $y_1 \ldots\ldots\ldots\ldots y''_4$ mennyiségekből képezett determinanst, $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ a C'_1, C'_2, C'_3, C'_4-hez tartozó aldeterminansokat, és a II. rendszerben a $z \ldots\ldots\ldots z''_3$-re vonatkozólag $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ a megfelelő determinansokat, származik közvetetlenül:

Az I. és III. rendszerben:

$$\left.\begin{array}{l} C_1' = T\frac{\Delta_1}{\Delta} \\ C_2' = T\frac{\Delta_2}{\Delta} \\ C_3' = T\frac{\Delta_3}{\Delta} \\ C_4' = T\frac{\Delta_4}{\Delta} \end{array}\right|$$

A II. rendszerben:

$$\left.\begin{array}{l} C_1' = T\frac{\Delta_1}{\Delta} \\ C_2' = T\frac{\Delta_2}{\Delta} \\ C_3' = T\frac{\Delta_3}{\Delta} \end{array}\right\}$$

Ezekből a C_n értékei egyszerű quadratura gyanánt következnek, nevezetesen ered:

$$C_n = \int T\frac{\Delta_n}{\Delta}dt + \text{Constans} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Az integrátió állandójának az értéke tetszőleges ugyan, mindazonáltal czélszerűnek látszik, a 27. §. megjegyzése értelmében, a két typikus egyenlet teljes integráljait következőleg írni:

Az I. és III. rendszerben:

$$y'''' + T_1 y''' + T_2 y'' + T_3 y' + T_4 y = T,$$

$$Y = \sum C_n y_n = \sum c_n y_n + \sum y_n \left(\int T\frac{\Delta_n}{\Delta}\,dt + \Delta c_n \right).$$

A II. rendszerben:

$$z''' + T_1 z'' + T_2 z' + T_3 z = T;$$

$$Z = \sum C_n z_n = \sum c_n z_n + \sum z_n \left(\int T\frac{\Delta_n}{\Delta}\,dt + \Delta c_n \right).$$

Észreveszszük, hogy ezen esetben is az itt tárgyalt egyenletek integrátiója vissza van vezetve a nem teljes typikus egyenletek teljes integráljaira; ha ezek ismeretesek, akkor csak néhány egyszerű operátió és egy quadratura végezendő, hogy a teljes typikus egyenletek teljes integráljait nyerjük.

Jegyzet. A nem teljes typikus egyenletek megoldásai.

A megvizsgált nem teljes typikus egyenletek:

$$y'''' + T_1 y''' + T_2 y'' + T_3 y' + T_4 y = 0$$

$$z''' + T_1 z'' + T_2 z' + T_3 z = 0$$

lineár, *negyed*- vagy *harmad*rendű egyenletek, melyek együtthatói általánosságban az időnek függvényei.

A 34. §. nem teljes különbségi egyenletei:

Az I. és III. rendszerben:

$$j_1'''' + \mathrm{A}_1 j_1''' + \mathrm{B}_1 j_1'' + \Gamma_1 j_1' + \Delta_1 j_1 = 0,$$

$$j_2'''' + \mathrm{A}_2 j_2''' + \mathrm{B}_2 j_2'' + \Gamma_2 j_2' + \Delta_2 j_2 = 0,$$

$$\varphi'''' + a_{12}\varphi''' + b_{12}\varphi'' + c_{12}\varphi' + d_{12}\varphi = 0.$$

A II. rendszerben:

$$j''' + \mathrm{A} j'' + \mathrm{B} j' + \Gamma j = 0,$$

$$\varphi''' + a\varphi'' + b\varphi' + c\varphi = 0.$$

Valamenynyi együttha:ó itt az idő ismeretes függvénye; de mindaddig, míg azok explicite nincsenek adva, az egyes partikuláris megoldások felől nem mondhatunk semmi közelebbit, és az itt körvonalozott általános vizsgálatot nem lehet folytatni.

A 28. §. nem teljes egyenleteinek tárgyalása alkalmával az együtthatók valamenynyien állandók voltak, mi által a fellépő viszonyok rendkívül egyszerűsbíttettek; ezért is ott az általános tárgyalást folytatni lehetett.

Azonban itt is létezik egy eset, melynél a szövegben írt egyenletek együtthatói *állandók* lesznek; ez bekövetkezik, midőn az adott, külső electromotorius erők, E_1, E_2, E_3, E, 3., 4., 5. §§., *állandók;* ekkor ezen egyenletek közvetetlenül megoldhatók és a további vizsgálat is felette egyszerűsbödik.

36. §. *A harmadik és a magasabb közelítés különbségi egyenleteinek integrátiója.*

Kiinduló pontunk, hogy a második közelítés egyenletei, 35. §., teljesen integráltattak.

Ekkor a magasabb rendű közelítések egyenletei minden nehézség nélkül integrálhatók.

Ugyanis, a harmadik közelítésnél a 34. §. különbségi egyenleteihez hozzálépnek az

$$S_{11}(t), S_{22}(t), T_{12}(t); \quad S(t), T(t),$$

függvények és pedig azok legalsóbb rendű tagjai, melyek j_1, j_2, φ, illetve j, φ-től függenek.

Ha ezen utoljára nevezett változók helyébe azoknak a második közelítésből folyó értékeit helyettezzük, 35. §., és csak legalsóbb tagjaikat tartjuk meg, akkor az

$$S_{11_1}(t), S_{22_1}(t), T_{12_1}(t); \quad S_1(t), T_1(t),$$

függvényeket nyerjük, melyek a harmadrendű tagokat tartalmazzák és így ismereteseknek tételezhetők fel.

Észreveszszük, hogy a különbségi egyenletek typikus alakja a *harmadik* közelítesben a következő:

Az I. és III. rendszerben: $y'''' + T_1 y''' + T_2 y'' + T_3 y' + T_4 y = T + T^1,$

A II. rendszerben: $z''' + T_1 z'' + T_2 z' + T_3 z = T + T^1,$

hol T' az időnek épen említett ismeretes függvényét jelentik.

Ezen egyenletek integrátiója legegyszerűbben történik a parameterek variatiójának módszere segélyével, a mint azt a megelőző §-ban alkalmaztuk; az ott adott formulák is közvetetlenül használhatók azon megjegyzéssel, hogy az ott fellépő T függvények helyébe a $T + T'$ összegek lépnek.

Ezek értelmében a harmadik közelítés teljes integráljai a második közelítés integráljaitól csak a következő, az utóbbiakhoz hozzákapcsolandó tagokkal fognak különbözni:

Az I. és III. rendszerben:

$$\Sigma y_n\left(\int T^1 \frac{\varDelta_n}{\varDelta} dt + \varDelta c_n\right);$$

A II. rendszerben:

$$\Sigma z_n\left(\int T^1 \frac{\varDelta_n}{\varDelta} dt + \varDelta c_n\right).$$

Az integrátió folytatása magasabb rendű közelítéseknél a megelőzőkből önként világos.

De nem fölösleges az a megjegyzés, hogy az a pontosság, melyet ez a harmadik közelítés nyújt, csak rendkívüli, és bizonyos, meghatározott czélokra eszközölt vizsgálati esetekben lesz igénybe véve, és hogy az ilynemű esetek tárgyalásánál mindig bizonyos számú egyszerűsbítő feltételek és viszonyok lépnek fel, melyeknek tekintetbe vétele az algebrai számítását a magasabb rendű közelítéseknek igen tetemes mértékben könnyíti.

FÜGGELÉK

ÉS

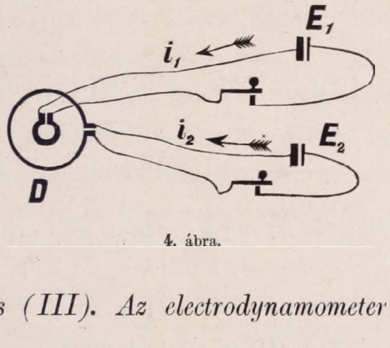
A TÁBLÁK MAGYARÁZATA.

Az electromos mérések néhány egyszerű módszere közönséges számításának összehasonlítása az első közelítés számításával.

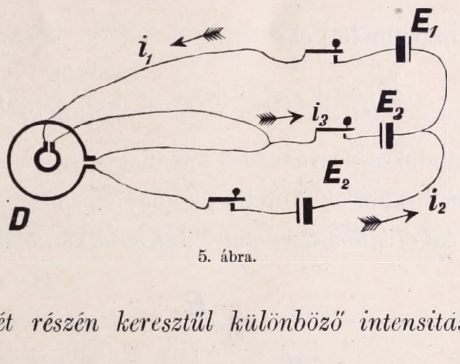
25a. §. *Az áramintensitások és a kitérés első közelítésének kifejezései galvanometereknél és electrodynamometereknél.*

Már a 25. §-ban, 28. l., kiemeltük, hogy az áramintensitások az első közelítésben a mérő eszköz mozgoható részének mozgásától függetlenek, és hogy a kitérés első közelítését nyerjük, ha az áramintensitásnak épen említett értékeit alapúl veszszük.

Önként folyik, hogy az electrodynamometer számára fennálló ezen körülmények közvetetlenűl a *galvanometer* számára is érvényesek; ekkor ugyanis az $\eta_1 i_{1_1} i_{2_1} + \xi_1 i_{1_1}$ és az $\eta_1 i_1^2 + \xi_1 i_1$ összegek, melyek a 25. §. I., III., II. rendszerei utolsó egyenleteiben fellépnek, egy-egy tagra redukálódnak, melynek alakja $\xi_g i_{1_1}$ és $\xi_g i_1$, hol ξ_g a galvanometer úgynevezett állandójával arányos menynyiséget jelent.



4. ábra.



5. ábra.

(I) és (III). Az electrodynamometer mindkét részén keresztül különböző intensitású áramok haladnak.

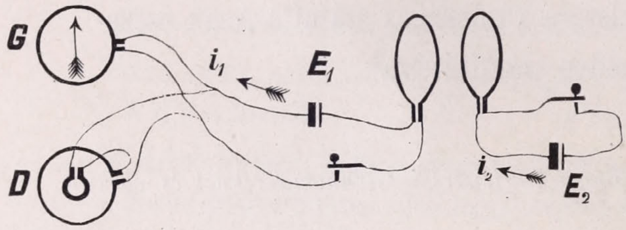
Ha az electrodynamometer mindkét része külön, zárt vezetékekhez tartozik, 3. §., vagy ha azok egy egyszerűen elágazott vezeték két különböző ágában fekszenek, 5. §., akkor az első közelítés értékeire nézve a 25. §. (I) és (III) egyenletei érvényesek, melyek integráljai a 28. és 29. §§. (I), (III) és (I_a), (III_a) egyenletei értelmében írhatók:

$$\text{(I) és (III)}\quad \begin{cases} i_{1_1} = \alpha_1 e^{-\varepsilon_1 t} + \beta_1 e^{-\varepsilon_2 t} + \dfrac{1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \left\{ e^{-\varepsilon_1 t} \int E_1(t) e^{+\varepsilon_1 t} dt - e^{-\varepsilon_2 t} \int E_1(t) e^{+\varepsilon_2 t} dt \right\}; \\ i_{2_1} = \alpha_2 e^{-\varepsilon_1 t} + \beta_2 e^{-\varepsilon_2 t} + \dfrac{1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \left\{ e^{-\varepsilon_1 t} \int E_2(t) e^{+\varepsilon_1 t} dt - e^{-\varepsilon_2 t} \int E_2(t) e^{+\varepsilon_2 t} dt \right\}; \\ \varphi_1 = \vartheta + \gamma_1 e^{-k_1 t} + \gamma_2 e^{-k_2 t} + \dfrac{1}{k_2 - k_1} \left\{ e^{-k_1 t} \int (\eta_1 i_{1_1} i_{2_1} + \xi_1 i_{1_1}) e^{+k_1 t} dt - e^{-k_2 t} \int (\eta_1 i_{1_1} i_{2_1} + \xi_1 i_{1_1}) e^{+k_2 t} dt \right\}. \end{cases}$$

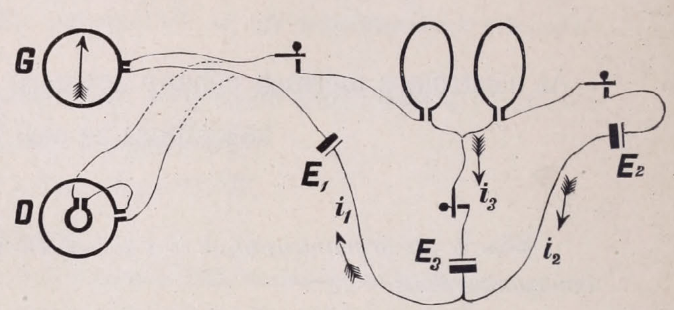
Az $E_1(t)$ és $E_2(t)$ függvények, 22. §., adott és ismeretes menynyiségek, ugyanaz áll ε_1, ε_2 és k_1, k_2-ra nézve, (4_a) és (7_a) egyenletei a 28. §-nak; az a_1, a_2, β_1, β_2' állandók összefüggését a 28. §. $I_{a\beta}$ és $III_{a\beta}$ egyenletei szolgáltatják; az integrátió négy független állandója: a_1, β_1, γ_1, γ_2 a kezdőállapot adataiból azaz az áramintensitások, a kitérés és a sebesség kezdőértékeiből határozódik meg.

Ezen viszonyoknak megfelelő berendezéseket a 4. és 5. ábra tünteti elő.

(I) és (III) combinálva (II)-vel. A galvanometeren vagy az electrodynamometeren keresztül csak egy áram halad.



6. ábra.



7. ábra.

Midőn, mint fent, két külön zárt vezeték vagy egy egyszerűen elágazott vezeték van jelen, de e mellett a mérő eszközön keresztül csak egy áram, vagy az áramnak csak *egy* ága halad, akkor az áramintensitások számára az ezen §-ban (I) és (III) alatt felírt egyenletek érvényesek; ellenben a kitérésre nézve, a galvanometernél:

$$(\mathrm{I, III/II}_G) \;.\;.\;.\; \varphi_1 = \vartheta + \gamma_1 e^{-k_1 t} + \gamma_2 e^{-k_2 t} + \frac{\xi_g}{k_2 - k_1}\left\{e^{-k_1 t}\int i_{1_1} e^{+k_1 t} dt - e^{-k_2 t}\int i_{1_1} e^{+k_2 t} dt\right\};$$

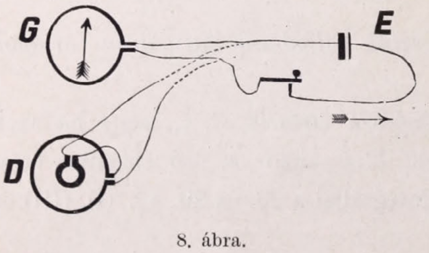
az electrodynamometernél:

$$(\mathrm{I, III/II}_D) \;.\;.\;.\; \varphi_1 = \vartheta + \gamma_1 e^{-k_1 t} + \gamma_2 e^{-k_2 t} + \frac{1}{k_2 - k_1}\left\{e^{-k_1 t}\int (\eta_1 i_{1_1}^2 + \xi_1 i_{1_1}) e^{+k_1 t} dt - e^{-k_2 t}\int (\eta_1 i_{1_1}^2 + \xi_1 i_{1_1}) e^{+k_2 t} dt\right\}.$$

Az állandókra nézve a fent tett megjegyzés érvényes,

A 6. és 7. ábra előtűntetik az ide tartozó eseteket.

(II). A galvanometer vagy az electrodynamometeren keresztül az egyetlen, jelen lévő áram halad.



8. ábra.

Ha egészben véve csak egy áram van jelen, 4. §., akkor az áramintensitás első közelitésére nézve áll a 25. §. (II) egyenlete, melynek integrálja a 29. §. (II) és (II_a) egyenlete szerint:

$$(\mathrm{II}) \;.\;.\;.\;.\;.\; i_1 = a e^{-ct} + e^{-ct}\int E(t) e^{+ct} dt.$$

Ellenben a kitérés kifejezései a 29. §. (II_a) egyenlete szerint adódnak, a galvanometernél:

$$(\mathrm{II}_G) \;.\;.\;.\; \varphi_1 = \vartheta + \gamma_1 e^{-k_1 t} + \gamma_2 e^{-k_2 t} + \frac{\xi_g}{k_2 - k_1}\left\{e^{-k_1 t}\int i_1 e^{+k_1 t} dt - e^{-k_2 t}\int i_1 e^{+k_2 t} dt\right\};$$

az electrodynamometernél:

$$(\mathrm{II}_D) \;.\;.\;.\; \varphi_1 = \vartheta + \gamma_1 e^{-k_1 t} + \gamma_2 e^{-k_2 t} + \frac{1}{k_2 - k_1}\left\{e^{-k_1 t}\int (\eta_1 i_1^2 + \xi_1 i_1) e^{+k_1 t} dt - e^{-k_2 t}\int (\eta_1 i_1^2 + \xi_1 i_1) e^{+k_2 t} dt\right\}.$$

Az integrátió állandói, a, γ_1, γ_2 az áramintensitás, a kitérés és a sebesség kezdőértékeiből határozódnak meg.

A 8. ábra ezen eset kisérleti berendezésének felel meg.

Ha mostan a közönséges számítást az első közelítés ezen eredményeivel összehasonlítani kivánjuk, mindenekelőtt meg kell jegyeznünk, hogy ezt minden egyes esetre nézve külön-külön kell megtennünk, és hogy ezen czélra a jelenség minden különös körülményeit ismernünk kell.

A következőkben aránylag egyszerű három eset, mely gyakran alkalmazott mérő módszerek typusa gyanánt szolgálhat, közelebbi vizsgálatnak lesz alávetve, és az eredmény graphikailag előtűntetve.

Mindazonáltal itt is úgy vélekedünk, hogy «gyakorlati formulák» felállításától eltekinthetünk, mivel ilyeneket, szükség esetén mindenkor, az itt talált általánosabb jellegű eredményekből esetről esetre származtathatni.

Hogy azonban az inductió időbeli lefolyásának itt keresett befolyását jobban kiemeljük, szándékosan oly értéket tulajdonítottunk itt az állandóknak, melyek már a rajzban is jól felismerhető különbséget létesítenek az első közelítés és a közönséges számítás görbéi között.

Ily módon jó bepillantást nyerünk a nevezett befolyás természetébe, úgy hogy kevésbbé egyszerű esetekben is könnyen tájékozódhatunk az eszköz felfüggesztett része mozgásának jellegét illetőleg.

Az I. táblához.

Valamely állandó electromotorius erőnek vagy stationárius áramnak mérése az első kiütés segélyével.

Valamely egyszerű, el nem ágazott vezeték egy galvanometert vagy electrodynamometert tartalmaz, és egy állandó electromotorius erőt; v. ö. a megelőző §. 8. ábráját.

Zárjuk a vezetéket: keletkezik egy áram, mely a zérus intensitásból kiindulva csakhamar eléri azt az értékét, mely az *Ohm*-féle törvénynek felel meg.

Ha nincsen idő a felfüggesztett rész új egyensúlyi helyzetét bevárni, akkor a zárás után bekövetkező első kiütést észleljük, hogy ebből az állandó electromotorius erő, vagy a stationáriussá vált áram erősségére lehessen következtetni.

Az áramintensitás számítása.

Ezen esetben, a 22. §. értelmében:

$$\mathfrak{c}=\frac{w}{L_0};\quad E(t)=\frac{E}{L_0}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\qquad(1)$$

Továbbá, a stationáriussá vált áramintensitás a 4. §. szerint:

$$J=\frac{E}{w}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\qquad(2)$$

Az i_1 értékét a megelőző §. (II) egyenletéből találjuk:

$$i_1=J+ae^{-\mathfrak{c}t}.$$

Az időszámítás kezdőpontja a zárás pillanatában legyen; e szerint az intensitás kezdőértéke zérus; ebből folyik: $a=-J$ és

$$i_1 = J(1 - e^{-ct}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

(*G.*) *Galvanometer.*

1_G. *A kitérés első közelítésének számítása.*

Helyettezve a (3) egyenletből az i_1 értékét a megelőző §. (II_G) egyenletébe, nyerjük a mozgásba hozott galvanometertű kitérése első közelítése számára a következő kifejezést:

$$(\text{II}_G) \ . \ . \ . \quad \varphi_1 = \vartheta + f_0 + e^{-\frac{1}{2}\varkappa^2 t}\{\mathfrak{g}_0 \cos(\tfrac{1}{2}\nu^2 t) + \mathfrak{h}_0 \sin(\tfrac{1}{2}\nu^2 t)\} + f_1 e^{-ct},$$

hol φ_1 és t kivételével valamenyi menyyiség állandó.

Ámde, a 29. §. (9) egyenlete szerint áll:

$$\tfrac{1}{2}\nu^2 = \sqrt{\lambda^2 - \tfrac{1}{4}\varkappa^4} = \frac{\pi}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

hol T a tű lengési ideje.

Továbbá tegyünk:

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\mathfrak{h}_0}{\mathfrak{g}_0}, \qquad H^2 = \mathfrak{g}_0^2 + \mathfrak{h}_0^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

és jegyezzük meg, hogy a 12. §. (9) egyenletében fellépő ϑ menynyiség egyszerűség kedvéért zérussá tehető; ekkor φ_1 és φ_1' számára lesz:

$$(\text{II}_G) \ . \ . \ . \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_1 &= f_0 + e^{-\frac{1}{2}\varkappa^2 t} H \cos\left(\frac{\pi t}{T} - \mu\right) + f_1 e^{-ct} \\ \varphi_1' &= -e^{-\frac{1}{2}\varkappa^2 t}\tfrac{1}{2}\varkappa^2 H \cos\left(\frac{\pi t}{T} - \mu\right) - e^{-\frac{1}{2}\varkappa^2 t}\frac{\pi}{T} H \sin\left(\frac{\pi t}{T} - \mu\right) - c f_1 e^{-ct}. \end{aligned} \right.$$

Az f_0 és f_1 értékei az integrátió végzésével a következőek:

$$f_0 = \frac{\xi_g J}{\lambda^2}; \qquad f_1 = -\frac{\xi_g J}{\lambda^2 + c^2 - \varkappa^2 c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Az integrátio állandói, $\mathfrak{g}_0$ és $\mathfrak{h}_0$ vagy H és μ, abból a feltételből folynak, hogy az időszámítás kezdetén (azaz a zárás pillanatában) a tű egyensúlyi helyzetben, $\varphi_{t=0} = 0$, és nyugalomban, $\varphi'_{t=0} = 0$, van.

A továbbiakban a $\varkappa^2$-et az első számításnál zérusnak veszszük, azaz, a csillapítást elhanyagolhatóan csekélynek tekintjük, és pedig azon oknál fogva, mivel itt különösen az önindnctió befolyását a galvanometertű mozgásának első szakaszára kivánjuk megállapitani és előtűntetni.

Ekkor lesz:

$$\frac{\pi}{T} = \lambda;$$

és a kezdet feltételei:

$$t = 0: \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_{t=0} &= \frac{J\xi_g}{\lambda^2} + H\cos\mu - \frac{J\xi_g}{\lambda^2 + c^2} = \mathfrak{f}_0 = 0, \\ \varphi'_{t=0} &= +\lambda H \sin\mu + \frac{cJ\xi_g}{\lambda^2 + c^2} = \mathfrak{f}_0' = 0. \end{aligned} \right.$$

Ezekből közvetetlenűl ered:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}\mu &= \frac{\lambda}{c} \\ H &= -J\xi_g \frac{c}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{(\lambda^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

2_G. *A kitérés közönséges számítása.*

Ha egy állandó electromotorius erőt az első kitérésből mérjük, a közönséges számításnál felveszszük, hogy az áramintensitás elhanyagolhatóan rövid idő alatt a vezeték zárása után, stationárius értékét, J-t eléri és a jelenség egész tartama alatt ezen intensitással a tűre hat.

Ha a $\varkappa^2$ csillapítás-tényezőt, mint az 1_G. pontban, elhanyagoljuk, és megjegyezzük, hogy ekkor ismét $\lambda=\frac{\pi}{T}$, akkor a galvanometertű mozgási egyenlete

$$\varphi''+\lambda^2\varphi=\xi_g J,$$

mely a $\varphi_{t=0}=0$ és $\varphi'_{t=0}=0$ kezdet-feltételekkel együtt azonnal adja:

$$\varphi=\frac{J\xi_g}{\lambda^2}-\frac{J\xi_g}{\lambda^2}\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

3_G. *Az első közelítés összehasonlítása a közönséges számítással.*

Az 1_G. és 2_G. pontokból a következő összeállítás ered:

Első közelítés	Közönséges számítás
$\varphi_1=\frac{J\xi_g}{\lambda^2}\left\{1-\frac{c}{(c^2+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}}\cos\left(\frac{\pi t}{T}-\mu\right)\right\}-\frac{J\xi_g}{c^2+\lambda^2}e^{-ct}$ $\operatorname{tg}\mu=\frac{\lambda}{c};\quad \lambda=\frac{\pi}{T};\quad c=\frac{w}{L_0}$	; $\varphi=\frac{J\xi_g}{\lambda^2}\left\{1-\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)\right\}$.

Az I. tábla bal fele előtünteti a galvanometer-tű kitérése, sebessége és gyorsulása görbéit a két számítási eljárás értelmében.

Az állandók értékei itt a következőek:

$$T=3{\cdot}14 \text{ másodpercz},\quad c=\frac{w}{L_0}=\frac{1}{\text{mp.}},\quad \lambda=\frac{1}{\text{mp.}};\quad \frac{J\xi_g}{\lambda^2}=3 \text{ centimeter.}$$

A vonalzott görbe a közönséges számításnak felel meg; az erősebben kihúzott görbe az első közelítésnek; a gyengébb vonalak ellenben az első közelítés felírt kifejezése két részének; geometriai öszszegök az erősebb görbét adja.

A különbség a tényleg elért és a közönségesen számított legnagyobb kitérés absolut értékei, és bekövetkezésök időpontjai között, itt világosan előtűnik; a különbség értékét a felírt formulák minden nehézség nélkül adják.

Az exponentiális tag az idővel gyorsan fogy és a mozgás mindinkább az első taghoz simúl.

A gyorsulás, a közönséges számítás értelmében, a jelenség kezdetén, hirtelen felszökik a zérustól az $J\xi_g$ véges értékig, e szerint szakadást mutat, mely épen nem a dolog természetében, hanem csak a közönséges számítás helytelen vagy legalább nem szigorú feltevéseiben rejlik, abban ugyanis, hogy az áramintensitás a vezetés zárása után elhanyagolhatóan csekély idő alatt stationarius értékét felveszi.

Ellenben az első közelítés görbéje minden viszonyában folytonos lefolyást mutat, a mint azt a jelenség természete is megkivánja.

(*D*.) *Electrodynamometer.*

1_D. *A kitérés első közelítésének számítása.*

Helyettezzük az áramintensitás $i_1=J(1-e^{-ct})$ értékét a megelőző §. (II_D) egyenletébe és vezessük be azt az egyszerűsítő felvételt, hogy a homogén mágnességi tér, melyben az eszköz van, zérus intensitású legyen (azaz a földmágnesség befolyását az eszköz közelében alkalmasan elhelyezett mágnesek által paralysáltnak vagy pedig az eszköz felfüggesztett részét astatikusnak tekintjük).

Ekkor a 14. §. (4) egyenletében fellépő ξ_1 együttható zérus lesz; e szerint a (II_D) egyenletben csak az η_1-el ellátott tagok maradnak, melyekből az integrátió után származik:

$$(\mathrm{II}_D) \quad . \quad . \quad . \quad \varphi_1=\vartheta+f_0+e^{\frac{1}{2}\varkappa^2 t}\{\mathfrak{g}_0\cos(\tfrac{1}{2}\nu^2 t)+\mathfrak{h}_0\sin(\tfrac{1}{2}\nu^2 t)\}+f_1e^{-ct}+f_2e^{-2ct},$$

hol a φ_1 és t kivételével valamenynyi menynyiség állandó.

Itt is írjunk, mint fent, 1_G. pontban:

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{\mathfrak{h}_0}{\mathfrak{g}_0},\qquad H^2=\mathfrak{g}_0^2+\mathfrak{h}_0^2,\qquad \tfrac{1}{2}\nu^2=\sqrt{\lambda^2-\tfrac{1}{4}\varkappa^4}=\frac{\pi}{T}\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Tegyünk továbbá itt is $\vartheta=0$, úgy, hogy lesz:

$$(\mathrm{II}_D)\quad . \quad . \quad . \quad . \quad \left\{\begin{aligned}\varphi_1&=f_0+e^{-\frac{1}{2}\varkappa^2 t}H\cos\left(\frac{\pi t}{T}-\mu\right)+f_1e^{-ct}+f_2e^{-2ct}\\ \varphi_1'&=-e^{-\frac{1}{2}\varkappa^2 t}\tfrac{1}{2}\varkappa^2 H\cos\left(\frac{\pi t}{T}-\mu\right)-e^{-\frac{1}{2}\varkappa^2 t}\frac{\pi}{T}\sin\left(\frac{\pi t}{T}-\mu\right)-cf_1e^{-ct}-2cf_2e^{-2ct}.\end{aligned}\right.$$

Az f_0, f_1, f_2 együtthatók az integratió után a következő értékűek:

$$f_0=\frac{J^2\eta_1}{\lambda^2};\quad f_1=-\frac{2J^2\eta_1}{\lambda^2+c^2-\varkappa^2 c};\quad f_2=\frac{J^2\eta_1}{\lambda^2+4c^2-2\varkappa^2 c}\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Az integratió állandói a $\varphi_{t=0}=0$ és $\varphi'_{t=0}=0$ kezdet-feltételekből következnek.

Hanyagoljuk itt is az első számításnál a csillapítást el; e szerint lesz $\varkappa^2=0$ és $\lambda=\frac{\pi}{T}$; a kezdet feltételei lesznek:

$$t=0:\quad \left\{\begin{aligned}\varphi_{t=0}&=+H\cos\mu+J^2\eta_1\left\{\frac{1}{\lambda^2}-\frac{2}{\lambda^2+c^2}+\frac{1}{\lambda^2+4c^2}\right\}=\mathfrak{f}_0=0\\ \varphi'_{t=0}&=+\lambda H\sin\mu+2J^2\eta_1 c\left\{\frac{1}{\lambda^2+c^2}-\frac{1}{\lambda^2+4c^2}\right\}=\mathfrak{f}_0'=0.\end{aligned}\right.$$

Egyszerű számítás után nyerjük:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\mu&=\frac{3c\lambda}{2c^2-\lambda^2}\\ H&=-\frac{J^2\eta_1}{\lambda^2}\left\{\left(1+\frac{\lambda^2}{c^2}\right)\left(1+\frac{\lambda^2}{4c^2}\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}\right\}\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

2_D. *A kitérés közönséges számítása.*

Ha az electrodynamometer mozogható része első kiütéséből a működő, állandó electromotorius erőre kivánunk következtetni, akkor itt is rendesen azt veszszük fel, hogy az áramintensitás a vezeték zárása után elhanyagolhatóan csekély időben stationárius értékét, J-t eléri, és a jelenség egész tartama alatt ezen intensitással fejt ki electrodynamikus-ponderomotorius hatást. Elhanyagolva itt is a csillapítást, leszen: $\varkappa^2=0$, $\lambda=\frac{\pi}{T}$, és az eszköz felfüggesztett részének mozgása lesz:

$$\varphi''+\lambda^2\varphi=\eta_1 J^2,$$

melyből, a $\varphi_{t=0}=0$ és $\varphi'_{t=0}=0$ kezdet-feltételek tekintetbe vételével származik

$$\varphi=\frac{J^2\eta_1}{\lambda^2}-\frac{J^2\eta_1}{\lambda^2}\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

3_D. *Az első közelítés összehasonlítása a közönséges számítással.*

Az 1_D. és 2_D. pontokból azonnal ered a következő összehasonlítás:

Első közelítés: Közönséges számítás:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{J^2\eta_1}{\lambda^2}\left\{1-\left[\left(1+\frac{\lambda^2}{\mathfrak{c}^2}\right)\left(1+\frac{\lambda^2}{4\mathfrak{c}^2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\pi t}{T}-\mu\right)\right\}-J^2\eta_1\left\{\frac{2e^{-\mathfrak{c}t}}{\lambda^2+\mathfrak{c}^2}-\frac{e^{-2\mathfrak{c}t}}{\lambda^2+4\mathfrak{c}^2}\right\}\\ \operatorname{tg}\mu &= \frac{3\mathfrak{c}\lambda}{2\mathfrak{c}^2-\lambda^2}; \qquad \lambda=\frac{\pi}{T}, \qquad \mathfrak{c}=\frac{w}{L_0}.\end{aligned}\right\}; \qquad \varphi=\frac{J^2\eta_1}{\lambda^2}\left\{1-\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)\right\}.$$

Az I. tábla jobb fele előtünteti a kitérés, a sebesség és a gyorsulás lefolyását az electrodynamometer felfüggesztett részére nézve, a mint azokat a két számítási eljárás szolgáltatja.

A fentírt egyenletek állandóinak értékei itt a következőek:

$$T=3{\cdot}14 \text{ másodpercz}, \qquad \mathfrak{c}=\frac{w}{L_0}=\frac{1}{\text{mp.}}, \qquad \lambda=\frac{1}{\text{mp.}}; \qquad \frac{J^2\eta_1}{\lambda^2}=3 \text{ centimeter.}$$

A többire nézve a megelőző (G) fejezet 3_G. pontjának megjegyzései érvényesek.

A II. Táblához.

Valamely szomszédos vezeték zárása folytán keletkező és eltünő inductiós-áram mérése az első kiütés segélyével (ballistikus módszer).

Adva legyen két el nem ágazott vezeték, melyek egyike egy állandó electromotorius erőt, E_2-öt tartalmazza, de a mely vezeték még nyitva legyen, míg a másik zárt vezeték nem tartalmaz állandó electromotorius erőt, hanem egy galvanometert vagy electrodynamometert.

Ilynemű berendezésnek a 25_a. §. 6. ábrája felel meg, ha benne tétetik $E_1=0$; az ugyanazon §. 7. ábrájának megfelelő berendezések analog, de valamivel bonyolódottabb számításokat igényelnek, mint a következők. Ha most az E_2-öt tartalmazó vezeték záratik, akkor benne az áram igen gyorsan száll föl a 3. §-ban említett stationárius értékéig, $J_2=\frac{E_2}{w_2}$, és e közben a szomszédos vezetékben egy inductiós áramot gerjeszt, mely a mérő eszközön keresztül haladva, annak felfüggesztett részét lökésszerűen hozza mozgásba, lengésbe.

Igen sokszor szolgál a lemért első kiütés (az amplitudo) az indukált áram első vagy második hatványa időbeli integráljának meghatározására.

Az áramintensitások számítása.

Ezen esetben, a 3. §., továbbá a 22. §. szerint, mivel $E_1=0$, és $E_2=$ *Constans*, és $J_1=0$, $J_2=\frac{E_2}{w_2}$, leszen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{w_1L_2+w_2L_1}{L_1L_2-M_0^2}&=\mathfrak{a}; & \frac{w_1w_2}{L_1L_2-M_0^2}&=\mathfrak{b};\\ E_1(t)&=0; & E_2(t)&=\frac{w_1E_2}{L_1L_2-M_0^2}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

E szerint a 25_a. §. (I) és (III) rendszerei első egyenletpárjai integrátiója után ered:

$$i_{1_1}=\alpha_1e^{-\varepsilon_1t}+\beta_1e^{-\varepsilon_2t}; \qquad i_{2_1}=J_2+\alpha_2e^{-\varepsilon_1t}+\beta_2e^{-\varepsilon_2t};$$

hol a 28. §. (4_a) és $\mathrm{I}_{\alpha\beta}$ egyenletei szerint áll:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1&=\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}-\tfrac{1}{2}\sqrt{\mathfrak{a}^2-4\mathfrak{b}}; & \varepsilon_2&=\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\mathfrak{a}^2-4\mathfrak{b}}\\ \alpha_2&=-\frac{\alpha_1}{\varepsilon_1M_0}(\varepsilon_1L_1-w_1); & \beta_2&=-\frac{\beta_1}{\varepsilon_2M_0}(\varepsilon_2L_1-w_1)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Az integrátió független állandói, α_1 és β_1 az intensitások kezdet-állapota feltételeiből határozódnak meg, azon állapotból nevezetesen, hogy a második vezeték zárása pillanatában az áramintensitások mindkét vezetékben zérusak; azaz áll:

$$0=\alpha_1+\beta_1; \qquad 0=J_2-\frac{\alpha_1}{\varepsilon_1 M_0}(\varepsilon_1 L_1-w_1)-\frac{\beta_1}{\varepsilon_2 M_0}(\varepsilon_2 L_1-w_1).$$

Ebből lesz:
$$\alpha_1=-J_2\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 M_0}{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)w_1}; \qquad \beta_1=+J_2\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 M_0}{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)w_1}.$$

E szerint az intensitások:

$$\left.\begin{aligned} i_{1_1}&=-J_2\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 M_0}{w_1(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}\left\{e^{-\varepsilon_1 t}-e^{-\varepsilon_2 t}\right\} \\ i_{2_1}&=J_2+J_2\frac{1}{w_1(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}\left\{\varepsilon_2(\varepsilon_1 L_1-w_1)e^{-\varepsilon_1 t}-\varepsilon_1(\varepsilon_2 L_1-w_1)e^{-\varepsilon_2 t}\right\}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Mivel a következőekben csak az i_{1_1} inductiós-áramot fogjuk tekinteni, czélszerű, ha rövidség kedvéért teszszük:

$$-J_2\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 M_0}{w_1(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}=A$$

és ezentúl írjuk:

$$i_{1_1}=A(e^{-\varepsilon_1 t}-e^{-\varepsilon_2 t}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

(G). *Galvanometer.*

1_G. *A kitérés első közelítésének számítása.*

Ha a fentírt (4) egyenletben talált értékét az i_{1_1}-nek a 25_a. §. (I, III/II$_G$) egyenletébe helyettezzük, az integrátió után az inductiós-áram által kitérített galvanometertű kitérése első közelítő kifejezése számára nyerjük:

$$(\text{I, III/II}_G) \quad \ldots \quad \varphi_1=\vartheta+e^{-\frac{1}{2}\varkappa^2 t}\left\{\mathfrak{g}_0\cos\left(\tfrac{1}{2}\nu t\right)+\mathfrak{h}_0\sin\left(\tfrac{1}{2}\nu t\right)\right\}+e_1 e^{-\varepsilon_1 t}+e_2 e^{-\varepsilon_2 t},$$

hol csak φ_1 és t változó menynyiségek.

Írjuk itt:

$$\operatorname{tg}\mu=-\frac{\mathfrak{g}_0}{\mathfrak{h}_0}; \quad H^2=\mathfrak{g}_0^2+\mathfrak{h}_0^2; \quad \tfrac{1}{2}\nu^2=\sqrt{\lambda^2-\tfrac{1}{4}\varkappa^4}=\frac{\pi}{T} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Ez által leszen, ha itt is a ϑ állandót zérusnak választjuk:

$$(\text{I, III/II}_G) \quad \ldots \quad \left\{\begin{aligned} \varphi_1&=e^{-\frac{1}{2}\varkappa^2 t}H\sin\left(\frac{\pi t}{T}-\mu\right)+e_1 e^{-\varepsilon_1 t}+e_2 e^{-\varepsilon_2 t} \\ \varphi_1'&=-e^{-\frac{1}{2}\varkappa^2 t}\tfrac{1}{2}\varkappa^2 H\sin\left(\frac{\pi t}{T}-\mu\right)+e^{-\frac{1}{2}\varkappa^2 t}\frac{\pi}{T}H\cos\left(\frac{\pi t}{T}-\mu\right)-\varepsilon_1 e_1 e^{-\varepsilon_1 t}-\varepsilon_2 e_2 e^{-\varepsilon_2 t}\end{aligned}\right.$$

Az e_1 és e_2 együtthatók értéke az integrátióból következik:

$$e_1=\frac{A\xi_g}{\lambda^2+\varepsilon_1^2-\varkappa^2\varepsilon_1}; \qquad e_2=-\frac{A\xi_g}{\lambda^2+\varepsilon_2^2-\varkappa^2\varepsilon_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Az integrátió H és μ állandóinak meghatározására a $\varphi_{t=0}=0$ és $\varphi'_{t=0}=0$ kezdet-feltételek szolgálnak. Hanyagoljuk itt is el, az első számításnál, a csillapítást, azaz, tegyük $\varkappa^2=0$, $\lambda=\frac{\pi}{T}$.

A kezdet-állapot feltételei lesznek:

$$t=0: \quad \left\{\begin{aligned} \varphi_{t=0}&=-H\sin\mu+A\xi_g\left\{\frac{1}{\lambda^2+\varepsilon_1^2}-\frac{1}{\lambda^2+\varepsilon_2^2}\right\}=\mathfrak{f}_0=0 \\ \varphi'_{t=0}&=+\lambda H\cos\mu-A\xi_g\left\{\frac{\varepsilon_1}{\lambda^2+\varepsilon_1^2}-\frac{\varepsilon_2}{\lambda^2+\varepsilon_2^2}\right\}=\mathfrak{f}_0'=0.\end{aligned}\right.$$

Ezekből H és μ egyszerű számítás utján erednek:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\mu &= \lambda \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\varepsilon_1\varepsilon_2-\lambda^2}; \\ H &= \frac{A\xi_g}{\lambda} \cdot \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_1\varepsilon_2} \left\{\left(1+\frac{\lambda^2}{\varepsilon_1^2}\right)\left(1+\frac{\lambda^2}{\varepsilon_2^2}\right)\right\}^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

2_G. *A kitérés közönséges számítása.*

Midőn az inductiós-áram által létesített első kiütést a közönséges módon számítjuk, azon felvételből szokás kiindúlni, hogy ezen áram egész lefolyása csak elhanyagolhatóan csekély időközben történik, és hogy hatásának egész tartama alatt a galvanometer-tűt nyugalmi helyzetében lévőnek tekinthetni.

E szerint az inductiós-áram electromagnetikus-ponderomotorius hatását a galvanometer-tűre impulsus-szerűnek (lökésszerűnek) tekintjük, mely hatás az eredetileg nyugvó, vagy esetleg mozgó tűnek sebességét elhanyagolhatóan rövid idő alatt véges értékkel változtatja.

Ha egyszerűség kedvéért itt is eltekintünk a csillapítástól, lesz $\varkappa^2=0$, és a tű mozgás-egyenlete:

$$\varphi_1''+\lambda^2\varphi_1=\xi_g i_{1},$$

melynek integrálja fent, az 1_G. pont (I., III/II$_G$) egyenlete alatt fel van írva (ha benne tétetik $\varkappa^2=0$).

A közönséges számítási eljárás ezen egyenletnek időbeli integrálját képezi:

$$\int\varphi_1''dt+\lambda^2\int\varphi_1 dt=\xi_g\int i_{1}dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Az említett felvétel értelmében (φ_1) az inductiós-áram hatása közben zérusnak tekintendő, míg a jobboldali integrál $t=0$-tól $t=\infty$-ig terjesztendő ki.

Származik:

$$[\varphi']=\xi_g\int_0^\infty i_{1}dt,$$

hol $[\varphi']$ a galvanometer-tű sebességi különbségét jelenti az inductiós-áram elején és végén.

Tekintetbe véve az i_{1}-nek a (4) egyenletben írt értékét, ered:

$$[\varphi']=\xi_g A\left\{\int_0^\infty e^{-\varepsilon_1 t}dt-\int_0^\infty e^{-\varepsilon_2 t}dt\right\}=A\xi_g\left\{\frac{1}{\varepsilon_1}-\frac{1}{\varepsilon_2}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

E szerint ez az a sebesség, melylyel a közönséges felvétel szerint, a tű az inductiós-áram megszűnése után, nyugalmi helyzetét elhagyja; lengésének amplitudója:

$$\frac{1}{\frac{\pi}{T}}\cdot[\varphi']=\frac{A\xi_g}{\lambda}\cdot\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_1\varepsilon_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

3_G. *Az első közelítés összehasonlítása a közönséges számítással.*

A fent, az 1_G. és a 2_G. pontokban talált formulákból a következő összehasonlítást nyerjük:

Első közelítés:	Közönséges számítás:
$\varphi_1=\frac{A\xi_g}{\lambda}\cdot\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left\{\left(1+\frac{\lambda^2}{\varepsilon_1^2}\right)\left(1+\frac{\lambda^2}{\varepsilon_2^2}\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{\pi t}{T}-\mu\right)+A\xi_g\left\{\frac{e^{-\varepsilon_1 t}}{\lambda^2+\varepsilon_1^2}-\frac{e^{-\varepsilon_2 t}}{\lambda^2+\varepsilon_2^2}\right\}$;	$\varphi=\frac{A\xi_g}{\lambda}\cdot\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)\cdot$
$\operatorname{tg}\mu=\lambda\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\varepsilon_1\varepsilon_2-\lambda^2}$; $\frac{\pi}{T}=\lambda$; $\varepsilon_1=\frac{1}{2}\mathfrak{a}-\frac{1}{2}\sqrt{\mathfrak{a}^2-4\mathfrak{b}}$, $\varepsilon_2=\frac{1}{2}\mathfrak{a}+\frac{1}{2}\sqrt{\mathfrak{a}^2-4\mathfrak{b}}$.	$A=-J_2\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}\cdot\frac{M_0}{w_1}$.

A II. tábla bal oldala előtünteti a galvanometer-tű kitérése, sebessége és gyorsulása görbéit, a két számítási eljárás értelmében.

A fentírt formulák állandói következőképen lettek választva:

$$T=3{\cdot}14 \text{ másodpercz}, \quad \lambda=\frac{1}{\text{mp.}}; \quad \varepsilon_1=\frac{1}{\text{mp.}}; \quad \varepsilon_2=\frac{3}{\text{mp.}}; \quad \frac{A\xi_g}{\lambda}\cdot\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}=3 \text{ centimeter.}$$

Itt is érvényesek az I. táblához G, 49. lap, 3_G. pont alatt tett megjegyzések, de itt úgy találjuk, hogy a közönséges számítási eljárás discontinuitása már a sebességi görbében fellép, mely a $t=0$ időpontban a zérustól hirtelen $A\xi_g\cdot\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ értékre szökik fel. Továbbá, a hozzátartozó gyorsulási görbének $t=0$ időpillanatban oly gyorsulást kellene mutatnia, mely elhanyagolhatóan rövid időköz alatt a sebességet a nevezett véges értékkel növelné; e szerint a gyorsulásnak $t=0$ időpontban a zérustól hirtelen a $+\infty$-ig kellene növekednie és rögtön ismét zérusra visszasülyednie, a mi rajzban csak indikáltatik.

Ezen helytelenségek és ellenmondások csak a közönséges számítási eljárás elégtelen feltevéseiben, de nem a jelenség természetében keresendők; az első közelítés görbéi minden tekintetben folytonosak.

(D.) *Electrodynamometer.*

1_D. *A kitérés első közelítésének számítása.*

Vegyük egyszerűség kedvéért itt is fel, mint a 49. lap 1_D. pontjában, hogy a földmágnesség befolyása alkalmas berendezések által ki lett küszöbölve, azaz, hogy a 14. §. (4) egyenletének ξ_1 együtthatója zérus.

Helyettezzük most (4)-ből az $i_{1_1}=A(e^{-\varepsilon_1 t}-e^{-\varepsilon_2 t})$ értéket a 25. §. (I., III/II$_D$) egyenletébe, melyben csak az η_1-el ellátott tagokat kell tekintetbe venni; az integrátió után ered:

$$(\text{I, III/II}_D) \quad . \quad . \quad . \quad \varphi_1=\vartheta+e^{-\frac{1}{2}\varkappa^2 t}\left\{\mathfrak{g}_0\cos\left(\tfrac{1}{2}\nu^2 t\right)+\mathfrak{h}_0\sin\left(\tfrac{1}{2}\nu^2 t\right)\right\}+e_3e^{-2\varepsilon_1 t}+e_4e^{-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)t}+e_5e^{-2\varepsilon_2 t},$$

hol szintén csak a φ_1 és a t a változó menynyiségek.

A ϑ állandót itt is zérusnak választjuk; rövidség kedvéért tétessék:

$$\operatorname{tg}\mu=-\frac{\mathfrak{g}_0}{\mathfrak{h}_0}; \quad H^2=\mathfrak{g}_0^2+\mathfrak{h}_0^2; \quad \tfrac{1}{2}\nu^2=\sqrt{\lambda^2-\tfrac{1}{4}\varkappa^4}=\frac{\pi}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

E szerint lesz:

$$(\text{I, III/II}_D)\left\{\begin{aligned} \varphi_1&=e^{-\frac{1}{2}\varkappa^2 t}H\sin\left(\frac{\pi t}{T}-\mu\right)+e_3e^{-2\varepsilon_1 t}+e_4e^{-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)t}+e_5e^{-2\varepsilon_2 t}\\ \varphi_1'&=-e^{-\frac{1}{2}\varkappa^2 t}\tfrac{1}{2}\varkappa^2 H\sin\left(\frac{\pi t}{T}-\mu\right)+e^{-\frac{1}{2}\varkappa^2 t}\frac{\pi}{T}H\cos\left(\frac{\pi t}{T}-\mu\right)-2\varepsilon_1e_3e^{-2\varepsilon_1 t}-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)e_4e^{-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)t}-2\varepsilon_2e_5e^{-2\varepsilon_2 t}.\end{aligned}\right.$$

Az e_3, e_4, e_5 együtthatók értékét az integrátió következőképen adja:

$$e_3=+\frac{A^2\eta_1}{\lambda^2+4\varepsilon_1^2-2\varkappa^2\varepsilon_1}; \quad e_4=-\frac{2A^2\eta_1}{\lambda^2+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2-\varkappa^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}; \quad e_5=+\frac{A^2\eta_1}{\lambda^2+4\varepsilon_2^2-2\varkappa^2\varepsilon_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Az integrátió H és μ állandói a kezdet feltételeiből: $\varphi_{t=0}=0$ és $\varphi'_{t=0}=0$-ból adódnak.

Az első számításnál itt is hanyagoljuk el a csillapítást, mi által: $\varkappa^2=0$, $\lambda=\frac{\pi}{T}$.

A kezdet feltételei lesznek:

$$t=0:\left\{\begin{aligned} \varphi_{t=0}&=-H\sin\mu+A^2\eta_1\left\{\frac{1}{\lambda^2+4\varepsilon_1^2}-\frac{2}{\lambda^2+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2}+\frac{1}{\lambda^2+4\varepsilon_2^2}\right\}=\mathfrak{f}_0=0\\ \varphi'_{t=0}&=+\lambda H\cos\mu-A^2\eta_1\left\{\frac{2\varepsilon_1}{\lambda^2+4\varepsilon_1^2}-\frac{2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{\lambda^2+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2}+\frac{2\varepsilon_2}{\lambda^2+4\varepsilon_2^2}\right\}=\mathfrak{f}_0'=0.\end{aligned}\right.$$

Ebből kissé hosszadalmas, de nem nehéz számítás után lesz:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\mu &= \frac{\lambda}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\cdot\frac{2((\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2+2\varepsilon_1\varepsilon_2)-\lambda^2}{4\varepsilon_1\varepsilon_2-3\lambda^2}\cdot \\ H &= \frac{A^2\eta_1}{\lambda}\cdot\frac{2(\varepsilon_2-\varepsilon_1)^2}{2\varepsilon_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2)2\varepsilon_2}\left\{\left(1+\frac{\lambda^2}{4\varepsilon_1^2}\right)\left(1+\frac{\lambda^2}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2}\right)\left(1+\frac{\lambda^2}{4\varepsilon_2^2}\right)\right\}^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots \quad (13)$$

2_D. *A kitérés közönséges számítása.*

Az electrodynamometer mozogható részének az inductiós-áram által létesített első kiütése közönséges számításánál ugyanazon általános megfontolásokból szokás kiindúlni, mint a galvanometernél a 2_G. alatti pontban.

Elhanyagolva itt is a csillapítást és a ϑ állandót zérussá téve, a mozgás egyenlete leszen:

$$\varphi_1''+\lambda\varphi_1=\eta_1 i_{1_1}^2,$$

melynek integrálja fent, az (I, III/II$_D$) alatti egyenletben van felírva.

Ha itt is a mozogható részt az inductiós-áram hatásának tartama alatt nyugalmi helyzetében levőnek tekintjük, akkor e közben $\varphi_1=0$ és az egyenlet időintegrálja lesz, a fentirt (4) egyenletnek, $i_{1_1}=A(e^{-\varepsilon_1 t}-e^{-\varepsilon_2 t})$-nek tekintetbe vételével:

$$\int\varphi''dt=\eta_1\int_0^\infty i_{1_1}^2 dt=A^2\eta_1\int_0^\infty(e^{-2\varepsilon_1 t}-2e^{-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)t}+e^{-2\varepsilon_2 t})dt,$$

azaz:

$$[\varphi']=A^2\eta_1\left\{\frac{1}{2\varepsilon_1}-\frac{2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}+\frac{1}{2\varepsilon_2}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (14)$$

Ez lesz a közönséges számítási eljárás értelmében a sebesség, melylyel az eszköz mozogható része az inductiós-áram hatása után, nyugalmi helyzetét elhagyja; ezek szerint az így keletkezett lengés amplitudója:

$$\frac{1}{\frac{\pi}{T}}\cdot[\varphi']=\frac{A^2\eta_1}{\lambda}\cdot\frac{2(\varepsilon_2-\varepsilon_1)^2}{2\varepsilon_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2)2\varepsilon_2} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (15)$$

3_D. *Az első közelítés összehasonlítása a közönséges számítással.*

A fent, az 1_D. és 2_D. pontok alatt tárgyalt formulák a következő összeállítást adnak:

Első közelítés:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 = {} & \frac{A^2\eta_1}{\lambda}\cdot\frac{2(\varepsilon_2-\varepsilon_1)^2}{2\varepsilon_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2)2\varepsilon_2}\left\{\left(1+\frac{\lambda^2}{4\varepsilon_1^2}\right)\left(1+\frac{\lambda^2}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2}\right)\left(1+\frac{\lambda^2}{4\varepsilon_2^2}\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{\pi t}{T}-\mu\right)+ \\ & +A^2\eta_1\left\{\frac{e^{-2\varepsilon_1 t}}{\lambda^2+4\varepsilon_1^2}-2\frac{e^{-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)t}}{\lambda^2+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2}+\frac{e^{-2\varepsilon_2 t}}{\lambda^2+4\varepsilon_2^2}\right\}; \\ \operatorname{tg}\mu = {} & \frac{\lambda}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\cdot\frac{2((\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2+2\varepsilon_1\varepsilon_2)-\lambda^2}{4\varepsilon_1\varepsilon_2-3\lambda^2}; \quad \lambda=\frac{\pi}{T}; \quad \varepsilon_1=\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}-\tfrac{1}{2}\sqrt{\mathfrak{a}^2-4\mathfrak{b}}; \quad \varepsilon_2=\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\mathfrak{a}^2-4\mathfrak{b}}. \end{aligned}\right|$$

Közönséges számítás:

$$\varphi=\frac{A^2\eta_1}{\lambda}\cdot\frac{2(\varepsilon_2-\varepsilon_1)^2}{2\varepsilon_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2)2\varepsilon_2}\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right). \qquad A=-J_2\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}\cdot\frac{M_0}{w_1}.$$

A II. tábla jobb oldala tartalmazza a kitérés, a sebesség és a gyorsulás görbéjét az electrodynamometer felfüggesztett részére nézve, a mint azokat a nevezett két számítási eljárás nyújtja.

A fennt adott formulák állandói itt következőleg lettek választva:

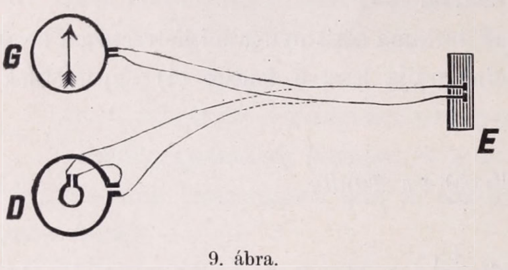
$$T=3{\cdot}14 \text{ másodpercz}\,; \quad \lambda=\frac{1}{\text{mp.}}, \quad \varepsilon_1=\frac{1}{\text{mp.}}; \quad \varepsilon_2=\frac{3}{\text{mp.}}; \quad \frac{A^2\eta_1}{\lambda}\cdot\frac{2(\varepsilon_2-\varepsilon_1)^2}{2\varepsilon_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2)2\varepsilon_2}=3 \text{ centimeter.}$$

Itt is érvényesek a 3_G. pont alatt tett megjegyzések, 49. és 54. ll.

A III. Táblához.

Valamely egyszerűen periodikus, de csak egy fél perioduson keresztül működő electromotorius erő által létesített inductiós-áramnak mérése az első kiütés segélyével.

Adva legyen valamely egyszerű, el nem ágazott vezeték, mely egy galvanomometert vagy electrodynamometert tartalmaz, ezenkívül, de az eszköztől nagy távolságban, oly berendezés, mely egy egyszerűen unduláló electromotorius erőt létesíthet (mint például valamely földinductor, vagy pontos sinusinductor), 9. ábra.



9. ábra.

Vegyük fel, hogy az electromotorius erő csak egy fél perioduson keresztül működjék (mint például a földinductornál), ez által az eleinte folyam nélküli vezetékben egy inductiós-áram keletkezik, mely az eszköz mozogható részét kitériti.

Ezen első kiütés sokszor szolgál az indukált áramintensitás első vagy második hatványa időbeli integráljának mértéke gyanánt.

Az áramintensitás számítása.

Az indukált áram intensitása meghatározásánál az a körülmény veendő tekintetbe, hogy a külső electromotorius erő, E_1 csak a periodus első felében különbözik a zérustól, ellenben ezután mindig zérus.

Jelentse itt:

$$\frac{\pi}{\omega}=\mathfrak{T},$$

a periodus felét; lesz az electromotorius erő

$$\left.\begin{array}{ll} t=0\text{-tól } t=\frac{\pi}{\omega}=\mathfrak{T}\text{-ig:} & E=A_0\omega\sin(\omega t)\,; \\ t=\frac{\pi}{\omega}\text{-tól } t=\infty\text{-ig:} & E=0. \end{array}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

Itt az A_0 állandó értéke az electromotorius erőnek a periodus felére vonatkozó időbeli integráljának fele, mert áll:

$$\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} E dt = A_0 \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin(\omega t)\omega dt = 2A_0 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

Az áramintensitást a fent nevezett két időközre nézve külön-külön kell megvizsgálni.

A. Első időköz. Helyettezve az E-nek a periodus első felére nézve fennálló értékét a 22. §. $E(t)$ kifejezésébe, származik itt:

$$E(t)=\frac{E}{L_0}=\frac{A_0}{L_0}\cdot\omega\sin(\omega t)\,; \quad \dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

ezt ismét a 25_a. §. (II) egyenletébe téve, és rövidség kedvéért írva:

$$\frac{A_0}{L_0}\omega=\frac{A_0}{w}\mathfrak{c}\omega=\mathbf{A}\,, \qquad (4)$$

származik belőle:

$$i_1'+\mathfrak{c}i_1=\mathbf{A}\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right) \qquad (5)$$

Az egyenlet integrálja:

$$i_1=ae^{-\mathfrak{c}t}+a\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)+b\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right),$$

e mellett az együtthatók értékei az integrátióból:

$$a=+\frac{A_0}{L_0}\cdot\frac{\omega\mathfrak{c}}{\mathfrak{c}^2+\omega^2}\,;\quad b=+\frac{A_0}{L_0}\cdot\frac{\omega^2}{\mathfrak{c}^2+\omega^2} \qquad (6)$$

Az integrátió állandója, a, az áramintensitás kezdő értékéből adódik, mely zérus értékű; azaz:

$$i_{t=0}=a-b=0\,;\quad a=+b.$$

Ha rövidség kedvéért:

$$\frac{A_0}{L_0}\frac{\omega}{\mathfrak{c}^2+\omega^2}=\mathfrak{A},$$

az áramintensitás értéke:

$$i_1=\mathfrak{A}\left\{-\omega\cos(\omega t)+\mathfrak{c}\sin(\omega t)+\omega e^{-\mathfrak{c}t}\right\} \qquad (8)$$

Ez az érték mindaddig érvényes, míg a külső electromotorius erő, E, az: $A_0\omega\sin(\omega t)$ értékkel bír.

Az első periodus felének elmúltával, azaz: $t=\frac{\pi}{\omega}=\mathfrak{T}$ időkor, az áramintensitás értéke:

$$t=\frac{\pi}{\omega}=\mathfrak{T}:\quad i_{t=\mathfrak{T}}=\mathfrak{A}\omega\left\{1+e^{-\mathfrak{c}\mathfrak{T}}\right\} \qquad (9)$$

B. Második időköz. Ha a külső electromotorius erő hatása (működése) megszűnik, leszen $E=0$ és a 22. §. értelmében:

$$E(t)=0\,, \qquad (10)$$

mi által a 25_a. §. (II) egyenlete redukálódik:

$$i_1'+\mathfrak{c}i_1=0$$

egyenletre, melyből:

$$i_1=ae^{-\mathfrak{c}t} \qquad (11)$$

Ez a kifejezés érvényes a $t=\mathfrak{T}$-től $t=\infty$-ig terjedő időközre nézve; az integrátió a állandója abból a feltételből folyik, hogy $t=\mathfrak{T}$ időpontban az áramintensitásnak egyenlőnek kell lennie a (9) egyenletben felírt értékkel, azaz kell, hogy álljon

$$t=\mathfrak{T}:\quad \left|\begin{array}{l} i_{t=\mathfrak{T}}=\mathfrak{A}\omega(1+e^{-\mathfrak{c}\mathfrak{T}}) \\ i_{t=\mathfrak{T}}=ae^{-\mathfrak{c}\mathfrak{T}} \end{array}\right|$$

Ha rövidség kedvéért teszszük:

$$\mathfrak{A}\omega(1+e^{-\mathfrak{c}\mathfrak{T}})=\mathfrak{B}$$

ered:

$$i_1=\mathfrak{B}e^{-\mathfrak{c}(t-\mathfrak{T})} \qquad (12)$$

Ez az érték az egész $t=\mathfrak{T}$-től $t=\infty$-ig terjedő időközre nézve érvényes.

(*G.*) *Galvanometer.*

1_G. *A kitérés első közelítésének számítása.*

Itt is szükséges, a kitérés számítását a $t=0$-től, $t=\mathfrak{T}$-ig és a $t=\mathfrak{T}$-től $t=\infty$-ig terjedő két időközre nézve külön-külön megtenni.

A. Első időköz. Ha a fent, a (8) egyenlet alatt talált i_1 intensitást a 25_a. §. (II_G) egyenletébe helyettezzük, és a γ_1 és γ_2-val ellátott exponentiális tagokat trigonometriai tagokká vonjuk össze, a nevezett egyenlet integrátiója után találjuk:

$$(\mathrm{II}_G) \quad . \quad . \quad . \quad \varphi_1 = \vartheta + e^{-\frac{1}{2}\varkappa^2 t}\left\{\mathfrak{g}_0 \cos\left(\tfrac{1}{2}\nu^2 t\right) + \mathfrak{h}_0 \sin\left(\tfrac{1}{2}\nu^2 t\right)\right\} + f_1 e^{-\mathfrak{c}t} + f_7 \cos(\omega t) + f_8 \sin(\omega t),$$

hol csak φ_1 és t változó menynyiségek.

Legyen itt is a ϑ állandó zérus értékű; továbbá tétessék rövidség kedvéért:

$$\operatorname{tg}\mu = -\frac{\mathfrak{g}_0}{\mathfrak{h}_0}; \quad H^2 = \mathfrak{g}_0^2 + \mathfrak{h}_0^2; \quad \tfrac{1}{2}\nu^2 = \sqrt{\lambda^2 - \tfrac{1}{4}\varkappa^4} = \frac{\pi}{T}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

úgy, hogy leszen:

$$(\mathrm{II}_G)_A \quad . \quad . \quad \begin{cases} \varphi_1 = e^{-\frac{1}{2}\varkappa^2 t} H \sin\left(\frac{\pi t}{T} - \mu\right) + f_1 e^{-\mathfrak{c}t} + f_7 \cos(\omega t) + f_8 \sin(\omega t). \\ \varphi_1' = -e^{-\frac{1}{2}\varkappa^2 t}\tfrac{1}{2}\varkappa^2 H \sin\left(\frac{\pi t}{T} - \mu\right) + e^{-\frac{1}{2}\varkappa^2 t}\frac{\pi}{T} H \cos\left(\frac{\pi t}{T} - \mu\right) - \mathfrak{c} f_1 e^{-\mathfrak{c}t} - \omega f_7 \sin(\omega t) + \omega f_8 \cos(\omega t). \end{cases}$$

Az f_1, f_7, f_8 együtthatók értékei az integrátióból következőképen adódnak:

$$f_1 = +\mathfrak{A}\xi_g \frac{\omega}{\lambda^2 + \mathfrak{c}^2 - \varkappa^2 \mathfrak{c}}; \quad f_7 = -\mathfrak{A}\xi_g \frac{\omega(\lambda^2 - \omega^2) + \mathfrak{c}\omega\varkappa^2}{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\varkappa^4}; \quad f_8 = +\mathfrak{A}\xi_g \frac{-\omega\omega\varkappa^2 + \mathfrak{c}(\lambda^2 - \omega^2)}{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\varkappa^4} \quad . \quad . \quad (14)$$

Az integrátió H és μ állandói a mozgás kezdetének feltételeiből: $\varphi_{t=0} = 0$, $\varphi'_{t=0} = 0$-ből határozódnak meg. Ha itt is az első számításnál a csillapítást elhanyagoljuk, lesz $\varkappa^2 = 0$, $\lambda = \frac{\pi}{T}$, és a kezdet feltételei lesznek:

$$t = 0: \quad \begin{cases} \varphi_{t=0} = -\ H \sin\mu + \mathfrak{A}\xi_g\left\{\frac{\omega}{\lambda^2 + \mathfrak{c}^2} - \frac{\omega}{\lambda^2 - \omega^2}\right\} = \mathfrak{f}_0 = 0. \\ \varphi'_{t=0} = +\lambda H \cos\mu - \mathfrak{A}\xi_g\left\{\frac{\omega\mathfrak{c}}{\lambda^2 + \mathfrak{c}^2} - \frac{\omega\mathfrak{c}}{\lambda^2 - \omega^2}\right\} = \mathfrak{f}_0' = 0. \end{cases}$$

Ezekből közvetetlenűl nyerjük:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\mu &= \frac{\lambda}{\mathfrak{c}}; \\ H &= \frac{\mathfrak{A}\xi_g}{\lambda} \cdot \frac{\omega}{(\lambda^2 + \mathfrak{c}^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\omega^2 + \mathfrak{c}^2}{\omega^2 - \lambda^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

E szerint, eltekintve a csillapítástól, a kitérés első közelítése:

$$\varphi_1 = \frac{\mathfrak{A}\xi_g}{\lambda} \frac{\omega(\omega^2 + \mathfrak{c}^2)}{(\lambda^2 + \mathfrak{c}^2)^{\frac{1}{2}}(\omega^2 - \lambda^2)} \sin\left(\frac{\pi t}{T} - \mu\right) + \frac{\mathfrak{A}\xi_g}{\omega^2 - \lambda^2}\left\{\omega\cos(\omega t) - \mathfrak{c}\sin(\omega t)\right\} + \mathfrak{A}\xi_g \frac{\omega e^{-\mathfrak{c}t}}{\lambda^2 + \mathfrak{c}^2} \quad . \quad . \quad (16)$$

Ez a kifejezés mindaddig érvényes, míg a külső electromotorius erő kifejezése: $E = A_0\omega\sin(\omega t)$.

A fél periodus elmúlta után, azaz $t = \frac{\pi}{T} = \mathfrak{T}$ időkor, a kitérés és a sebesség lesz:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{t=\mathfrak{T}} &= \frac{\mathfrak{A}\xi_g}{\lambda} \cdot \frac{\omega(\omega^2 + \mathfrak{c}^2)}{(\lambda^2 + \mathfrak{c}^2)^{\frac{1}{2}}(\omega^2 - \lambda^2)} \sin\left(\frac{\pi\mathfrak{T}}{T} - \mu\right) + \mathfrak{A}\xi_g\left\{-\frac{\omega}{\omega^2 - \lambda^2} + \frac{\omega}{\lambda^2 + \mathfrak{c}^2} e^{-\mathfrak{c}\mathfrak{T}}\right\} \\ \varphi'_{t=\mathfrak{T}} &= \mathfrak{A}\xi_g \frac{\omega(\omega^2 + \mathfrak{c}^2)}{(\lambda^2 + \mathfrak{c}^2)^{\frac{1}{2}}(\omega^2 - \lambda^2)} \cos\left(\frac{\pi\mathfrak{T}}{T} - \mu\right) + \mathfrak{A}\xi_g\left\{\frac{\omega\mathfrak{c}}{\omega^2 - \lambda^2} - \frac{\omega\mathfrak{c}}{\lambda^2 + \mathfrak{c}^2} e^{-\mathfrak{c}\mathfrak{T}}\right\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

B. Második időköz. Ha a külső electromotorius erő az első periodus első fele után megszűnik, akkor az i_1-nek fent, a (12) egyenletben adott értékét a 25_a. §. (II_G) egyenletébe kell helyetteznünk, ha a kitérést a $t = \mathfrak{T}$-től $t = \infty$-ig terjedő közre nézve kívánjuk számítani.

Jelelve a megfelelő együtthatókat nagy betűkkel, a nevezett egyenlet integrátiója adja:

$$(\mathrm{II}_G) \quad . \; . \; . \quad \varphi_1 = \vartheta + e^{-\frac{1}{2}\varkappa^2 t}\left\{\mathfrak{G}_0 \cos\left(\tfrac{1}{2}\nu^2 t\right) + \mathfrak{H}_0 \sin\left(\tfrac{1}{2}\nu^2 t\right)\right\} + F_1 e^{-\mathfrak{c}(t-\mathfrak{T})},$$

hol szintén csak φ_1 és t a változó menynyiségek.

Ha rövidség kedvéért teszszük:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\mathfrak{T}}{T}+\sigma\right) = -\frac{\mathfrak{G}_0}{\mathfrak{H}_0}; \quad K^2 = \mathfrak{G}_0^2 + \mathfrak{H}_0^2; \quad \tfrac{1}{2}\nu^2 = \sqrt{\lambda^2 - \tfrac{1}{4}\varkappa^4} = \frac{\pi}{T} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

és a ϑ állandót ismét zérusnak tekintjük, a kitérés és a sebesség első közelítése leszen:

$$(\mathrm{II}_G)_B \; . \; . \; . \left\{ \begin{aligned} \varphi_1 &= e^{-\frac{1}{2}\varkappa^2\mathfrak{T}} . \, e^{-\frac{1}{2}\varkappa^2(t-\mathfrak{T})} K \sin\left(\frac{\pi(t-\mathfrak{T})}{T} - \sigma\right) + F_1 e^{-\mathfrak{c}(t-\mathfrak{T})} \\ \varphi_1' &= e^{-\frac{1}{2}\varkappa^2\mathfrak{T}} . \, e^{-\frac{1}{2}\varkappa^2(t-\mathfrak{T})} K \left\{ -\tfrac{1}{2}\varkappa^2 \sin\left(\frac{\pi(t-\mathfrak{T})}{T} - \sigma\right) + \frac{\pi}{T}\cos\left(\frac{\pi(t-\mathfrak{T})}{T} - \sigma\right)\right\} - \mathfrak{c} F_1 e^{-\mathfrak{c}(t-\mathfrak{T})} \end{aligned} \right.$$

Az F_1 állandó értékét az integrátió következőleg szolgáltatja:

$$F_1 = \mathfrak{A}\xi_g\omega \frac{1+e^{-\mathfrak{c}\mathfrak{T}}}{\lambda^2+\mathfrak{c}^2-\varkappa^2\mathfrak{c}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19)$$

A K és σ állandói az integrátiónak az itt érvényes kezdet-feltételekből: $\varphi_{t=\mathfrak{T}}$ és $\varphi'_{t=\mathfrak{T}}$-ből, (17) egyenlet, határozódnak meg.

A csillapítást ismét elhanyagolva, lesz: $\varkappa^2 = 0$; $\lambda = \frac{\pi}{T}$; e szerint az $(\mathrm{II}_G)_B$-ből ezen feltételek lesznek:

$$t = \mathfrak{T}: \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_{t=\mathfrak{T}} &= -K \sin\sigma + \mathfrak{A}\xi_g\omega \frac{1+e^{-\mathfrak{c}\mathfrak{T}}}{\lambda^2+\mathfrak{c}^2} \\ \varphi'_{t=\mathfrak{T}} &= +\lambda K \cos\sigma - \mathfrak{A}\xi_g\omega\mathfrak{c} \frac{1+e^{-\mathfrak{c}\mathfrak{T}}}{\lambda^2+\mathfrak{c}^2} \end{aligned} \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17_a)$$

A jobboldali értékek a (17) egyenletek jobb oldalaival megfelelőleg egyenlőek lévén, a K és σ csupa ismert mennyiség által van meghatározva; kifejezéseik azonban meglehetősen bonyolódottak, úgy, hogy ezeket itt nem fogjuk felírni.

2_G. *A kitérés közönséges számítása.*

a) Első számítási mód.

Midőn a külső electromotorius erő periodusa, ugyanis $2\mathfrak{T}$ kicsiny a galvanometertű lengésének $2T$ periodusa ellenében, akkor, megfelelőleg az 53. lap 2_G. pontja alatt tett megjegyzéseknek, a tűt az inductiós-áram működésének egész tartama alatt nyugalomban és egyensúlyi helyzetében lévőnek tekintjük.

A csillapítás elhanyagolásával a mozgás egyenlete:

$$\varphi_1'' + \lambda^2\varphi_1 = \xi_g i_1,$$

melynek integráljai fent, az $(\mathrm{II}_G)_A$ és $(\mathrm{II}_G)_B$ egyenletek; a tű sebessége növekedését az inductiós-áram hatása folytán nyerjük ezen egyenletnek időbeli integráljából, ha e mellett a φ_1-et zérussal egyenlővé teszszük.

Ámde itt, a mint azt egy könnyű megfontolás és a fent írt (8) és (12) egyenletek tekintetbe vétele mutatja, a galvanometertű sebességi növekedése:

$$[\varphi'] = \xi_g \int_0^\infty i_1 dt = \xi_g \left\{ \mathfrak{A} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} (-\omega \cos(\omega t) + \mathfrak{c} \sin(\omega t) + \omega e^{-\mathfrak{c}t}) dt + \mathfrak{A}\omega (1 + e^{-\mathfrak{c}\frac{\pi}{\omega}}) \int_{\frac{\pi}{\omega}}^\infty e^{-\mathfrak{c}(t-\frac{\pi}{\omega})} dt \right\} =$$

$$= \xi_g \mathfrak{A} \left\{ \left[-\sin(\omega t) - \frac{\mathfrak{c}}{\omega} \cos(\omega t) - \frac{\omega}{\mathfrak{c}} e^{-\mathfrak{c}t} \right]_0^{\frac{\pi}{\omega}} - \frac{\omega}{\mathfrak{c}} (1 + e^{-\mathfrak{c}\frac{\pi}{\omega}}) \left[e^{-\mathfrak{c}(t-\frac{\pi}{\omega})} \right]_{\frac{\pi}{\omega}}^\infty \right\} =$$

$$= \xi_g \mathfrak{A} \left\{ 2\frac{\mathfrak{c}}{\omega} + \frac{\omega}{\mathfrak{c}} - \frac{\omega}{\mathfrak{c}} e^{-\mathfrak{c}\frac{\pi}{\omega}} + \frac{\omega}{\mathfrak{c}} \left(1 + e^{-\mathfrak{c}\frac{\pi}{\omega}}\right) \right\}.$$

Végre:

$$[\varphi'] = \mathfrak{A}\xi_g \,.\, 2\, \frac{\omega^2 + \mathfrak{c}^2}{\omega \mathfrak{c}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Ez az a sebesség, melylyel a tű, a közönséges felvétel értelmében, nyugalmi helyzetét elhagyja; az így származó lengést a következő kifejezés tünteti elő:

$$\varphi = \frac{\mathfrak{A}\xi_g}{\lambda} \,.\, 2\, \frac{\omega^2 + \mathfrak{c}^2}{\omega \mathfrak{c}} \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

β) Második számítási mód.

Az áramintensitást sokszor az önindERROR

Az áramintensitást sokszor az öninductió elhanyagolásával, az Ohm-féle törvény egyedüli tekintetbe vétele mellett szokás számítani.

Ekkor egyszerűen az 56. lap (1) egyenletéből irandó:

$$i = \frac{E}{w} = \frac{A_0}{w} \omega \sin(\omega t) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

és felveszszük, hogy ez az intensitás csak oly soká tart, a meddig a külső electromotorius erő E működik.

A tű mozgási egyenlete ekkor:

$$\varphi'' + \lambda^2 \varphi = \xi_g \frac{A_0}{w} \omega \sin(\omega t).$$

Ha a tűt az E működése alatt, azaz a $t=0$-tól $t=\frac{\pi}{\omega}$-ig terjedő időközben nyugalmi helyzetében lévőnek tekintjük, akkor sebességének növekedése az inductiós-áram hatása folytán:

$$[\varphi'] = \xi_g \frac{A_0}{w} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin(\omega t) \omega dt = 2 A_0 \xi_g \frac{1}{w}.$$

Ámde, a fent írt (4) és (8) egyenletekből lesz:

$$\mathfrak{c} = \frac{w}{L_0}; \qquad A_0 = \mathfrak{A} L_0 \frac{\omega^2 + \mathfrak{c}^2}{\omega}$$

e szerint a sebesség növekedése:

$$[\varphi'] = \mathfrak{A}\xi_g \,.\, 2\, \frac{\omega^2 + \mathfrak{c}^2}{\omega \mathfrak{c}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20_a)$$

mint azt már a (20) egyenletben találtuk.

E szerint az *α)* és *β)* alatti számítási módok ugyanazon eredményt adnak.

3_G. *Az első közelítés összehasonlítása a közönséges számítással.*

A kitérés formulái, ugyanis $(\mathrm{II}_G)_A$ (15), (16) és $(\mathrm{II}_G)_B$, továbbá a K amplitudó és a σ phásis értékei a (17) és (17_a)-ból általánosságban nem adnak egyszerű eredményt, ezért a formulák összehasonlítása nem látszik áttekinthetőnek.

A III. tábla bal fele előtünteti a kitérés, a sebesség és a gyorsulás görbéit a galvanometertűre nézve, a közönséges számítás és az első közelítés szerint.

A használt formulák állandóinak értéke itt:

$$T=3{\cdot}14 \text{ másodpercz}, \quad \frac{\pi}{\omega}=\mathfrak{T}=\frac{1}{2}T=1{\cdot}57 \text{ másodpercz}; \quad \mathfrak{c}=\frac{1}{\text{mp.}}; \quad 2\frac{\mathfrak{A}\xi_g}{\lambda}\cdot\frac{\omega^2+\mathfrak{c}^2}{\omega\mathfrak{c}}=3 \text{ centimenter.}$$

A rajzok első harmada a $t=0$-tól $t=\mathfrak{T}=\frac{1}{2}T$-ig terjedő időközre vonatkozik; itt a (16) formula érvényes és a gyengén kihúzott három görbe e formula három tagjának felel meg.

A rajzok többi része a $t=\mathfrak{T}=\frac{1}{2}T$ időponttól kezdve érvényes; itt a $(\mathrm{II}_G.)_B$ formula áll, a csillapítás elhanyagolásával, a (17_a)-ból meghatározott K és σ mennyiségekkel.

A mozgás az idő folyamával mindinkább hozzásímul e formula első tagjához.

A többire nézve a 49. és 54. lapok 3_G. pontjában tett megjegyzések érvényesek.

(*D.*) *Electrodynamometer.*

1_D. *A kitérés első közelítésének számítása.*

A számítást itt is a $t=0$-től $t=\mathfrak{T}$-ig és a $t=\mathfrak{T}$-től a $t=\infty$-ig terjedő két időközre nézve külön-külön kell végezni.

A. Első időköz. Helyettezzük a fent, a (8) egyenletben talált értékét az i_1 intensitásnak a 25_a. §. (II_D) egyenletébe és tekintsük a földmágnesség befolyását paralysáltnak, mint a 49. lap 1_D. pontjában (e szerint a 14. §. (4) egyenlete ξ_1 együtthatóját zérusnak); e mellett a fent írt (8) egyenlet szerint az i_1 négyzete:

$$i_1^2=\mathfrak{A}^2\left\{\tfrac{1}{2}(\omega^2+\mathfrak{c}^2)-2\omega^2e^{-\mathfrak{c}t}\cos\omega t+2\mathfrak{c}\omega e^{-\mathfrak{c}t}\sin(\omega t)+\tfrac{1}{2}(\omega^2-\mathfrak{c}^2)\cos(2\omega t)-\omega\mathfrak{c}\sin(2\omega t)+\omega^2e^{-2\mathfrak{c}t}\right\} \quad . \; . \; (23)$$

Továbbá, mint fent az 58. lap 1_G. pontjában, szabad írnunk:

$$\gamma_1e^{-k_1t}+\gamma_2e^{-k_2t}=e^{-\frac{1}{2}\varkappa^2t}\left\{\mathfrak{g}_0\cos(\tfrac{1}{2}\nu^2t)+\mathfrak{h}_0\sin(\tfrac{1}{2}\nu^2t)\right\}=e^{-\frac{1}{2}\varkappa^2t}H\sin\left(\frac{\pi t}{T}-\mu\right).$$

Ezek szerint az electrodynamometer mozogható része kitérése első közelítésének kifejezése leszen:

$$(\mathrm{II}_D)_A. \quad \varphi_1=e^{-\frac{1}{2}\varkappa^2t}H\sin\left(\frac{\pi t}{T}-\mu\right)+\left\{f_0+f_2e^{-2\mathfrak{c}t}\right\}+e^{-\mathfrak{c}t}\left\{f_3\cos(\omega t)+f_4\sin(\omega t)\right\}+\left\{f_{11}\cos(2\omega t)+f_{12}\sin(2\omega t)\right\},$$

hol csak φ_1 és t változó menynyiségek.

Az integrátió az f_0, f_2, f_3, f_4, f_{11}, f_{12} állandók számára a következő értékeket szolgáltatja:

$$\left.\begin{aligned}
f_0&=\mathfrak{A}^2\eta_1\frac{\frac{1}{2}(\omega^2+\mathfrak{c}^2)}{\lambda^2}; & f_2&=\mathfrak{A}^2\eta_1\frac{\omega^2}{\lambda^2+4\mathfrak{c}^2-2\varkappa^2\mathfrak{c}};\\
f_3&=-\mathfrak{A}^2\eta_1 2\omega\frac{\omega(\lambda^2-\omega^2+\mathfrak{c}^2-\varkappa^2\mathfrak{c})+\mathfrak{c}\omega(\varkappa^2-2\mathfrak{c})}{(\lambda^2-\omega^2+\mathfrak{c}^2-\varkappa^2\mathfrak{c})^2+\omega^2(\varkappa^2-2\mathfrak{c})^2}; & f_4&=-\mathfrak{A}^2\eta_1 2\omega\frac{\omega^2(\varkappa^2-2\mathfrak{c})-\mathfrak{c}(\lambda^2-\omega^2+\mathfrak{c}^2-\varkappa^2\mathfrak{c})}{(\lambda^2-\omega^2+\mathfrak{c}^2-\varkappa^2\mathfrak{c})+\omega^2(\varkappa^2-2\mathfrak{c})^2};\\
f_{11}&=+\mathfrak{A}^2\eta_1\frac{\frac{1}{2}(\omega^2-\mathfrak{c}^2)(\lambda^2-4\omega^2)+\omega\mathfrak{c}2\omega\varkappa^2}{(\lambda^2-4\omega^2)^2+4\omega^2\varkappa^4}; & f_{12}&=+\mathfrak{A}^2\eta_1\frac{\frac{1}{2}(\omega^2-\mathfrak{c}^2)2\omega\varkappa^2-\omega\mathfrak{c}(\lambda^2-4\omega^2)}{(\lambda^2-4\omega^2)^2+4\omega^2\varkappa^4}.
\end{aligned}\right| \quad . \; . \; (24)$$

Az integrátió állandói a mozgás kezdet-feltételeiből folynak; ezek: $\varphi_{t=0}=0$, $\varphi'_{t=0}=0$.

Elhanyagolva itt is az első számításnál a csillapítást, lesz $\varkappa^2=0$ és $\lambda=\frac{\pi}{T}$; a nevezett feltételek, némi rövidítések után a következők lesznek:

$$t=0:\left\{\begin{aligned}
\varphi_{t=0}&=-H\sin\mu+\mathfrak{A}^2\eta_1\left\{\frac{\frac{1}{2}(\omega^2+\mathfrak{c}^2)}{\lambda^2}+\frac{\omega^2}{\lambda^2+4\mathfrak{c}^2}-\frac{2\omega^2(\lambda^2-\omega^2-\mathfrak{c}^2)}{(\lambda^2-\omega^2+\mathfrak{c}^2)^2+4\omega^2\mathfrak{c}^2}+\frac{\frac{1}{2}(\omega^2-\mathfrak{c}^2)}{\lambda^2-4\omega^2}\right\}=\mathfrak{f}_0=0\\
\varphi'_{t=0}&=+\lambda H\cos\mu-\mathfrak{A}^2\eta_1\left\{\frac{2\omega^2\mathfrak{c}}{\lambda^2+4\mathfrak{c}^2}+\frac{4\lambda^2\omega^2\mathfrak{c}}{(\lambda^2-\omega^2+\mathfrak{c}^2)^2+4\omega^2\mathfrak{c}^2}-\frac{2\omega^2\mathfrak{c}}{\lambda^2-4\omega^2}\right\}=\mathfrak{f}'_0=0
\end{aligned}\right\} \quad . \; (25)$$

Ebből H és μ következik; kifejezéseik azonban nem egyszerűek. Ekkor a $(\mathrm{II}_D)_A$ egyenletben, eltekintve a csillapítástól, valamennyi együttható ismeretes lesz.

Ez az egyenlet mindaddig érvényes, míg az $E = A_0 \omega \sin(\omega t)$ electromotorius erő működik. A fél periodus elmúlta után, azaz $t = \frac{\pi}{\omega} = \mathfrak{T}$-kor, a (24) egyenletből, $\varkappa^2 = 0$ mellett lesz:

$$t=\mathfrak{T}:\left\{\begin{aligned} \varphi_{t=\mathfrak{T}} &= H\sin\left(\frac{\pi\mathfrak{T}}{T}-\mu\right)+\mathfrak{A}^2\eta_1\left\{\frac{\frac{1}{2}(\omega^2+\mathfrak{c}^2)}{\lambda^2}+\frac{\omega^2 e^{-2\mathfrak{c}\mathfrak{T}}}{\lambda^2+4\mathfrak{c}^2}-\frac{2\omega^2(\lambda^2-\omega^2-\mathfrak{c}^2)e^{-\mathfrak{c}\mathfrak{T}}}{(\lambda^2-\omega^2+\mathfrak{c}^2)^2+4\omega^2\mathfrak{c}^2}+\frac{\frac{1}{2}(\omega^2-\mathfrak{c}^2)}{\lambda^2-4\omega^2}\right\} \\ \varphi'_{t=\mathfrak{T}} &= \lambda H\cos\left(\frac{\pi\mathfrak{T}}{T}-\mu\right)-\mathfrak{A}^2\eta_1\left\{\frac{2\mathfrak{c}\omega^2 e^{-2\mathfrak{c}\mathfrak{T}}}{\lambda^2+4\omega^2}-\frac{4\lambda^2\omega^2\mathfrak{c}e^{-\mathfrak{c}\mathfrak{T}}}{(\lambda^2-\omega^2+\mathfrak{c}^2)^2+4\omega^2\mathfrak{c}^2}-\frac{2\mathfrak{c}\omega^2}{\lambda^2-4\omega^2}\right\} \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

B. Második időköz. Ha a külső electromotorius erő $t = \mathfrak{T}$ időpont után már nem működik, az eszköz felfüggesztett részének mozgását úgy találjuk, hogy az intensitás kifejezését, (12) egyenlet, a 25_a. §. (II_D) egyenletébe helyettezzük, az integrátiót elvégezzük, az együtthatókat nagy betűkkel jelöljük és a fent, a (18) egyenletben lévő transformatiót használjuk és végre a ϑ állandót zérussá teszszük. Származik ekként:

$$(\mathrm{II}_D)_B \quad . \quad . \quad . \quad \varphi_1 = e^{-\frac{1}{2}\varkappa^2\mathfrak{T}} \, . \, e^{-\frac{1}{2}\varkappa^2(t-\mathfrak{T})} K \sin\left(\frac{\pi(t-\mathfrak{T})}{T} - \sigma\right) + F_2 e^{-2\mathfrak{c}(t-\mathfrak{T})},$$

hol szintén csak φ_1 és t a változó menynyiségek.

Az F_2 együttható értékét az integrátió következőképen adja:

$$F_2 = \mathfrak{A}^2 \eta_1 \omega^2 \frac{(1+e^{-\mathfrak{c}\mathfrak{T}})^2}{\lambda^2 + 4\mathfrak{c}^2 - 2\varkappa^2\mathfrak{c}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Az integrátió K és σ együtthatói az itt érvényes kezdet-feltételekből következnek: $\varphi_{t=\mathfrak{T}}$ és $\varphi'_{t=\mathfrak{T}}$, v. ö. a (26) egyenleteket.

Elhanyagolva itt is a csillapítást, lesz: $\varkappa^2 = 0$; $\lambda = \frac{\pi}{T}$, és a $(\mathrm{II}_D)_B$ egyenletből:

$$t=\mathfrak{T}:\left\{\begin{aligned} \varphi_{t=\mathfrak{T}} &= -K\sin\sigma + \mathfrak{A}^2\eta_1\omega^2\frac{(1+e^{-\mathfrak{c}\mathfrak{T}})^2}{\lambda^2+4\mathfrak{c}^2}; \\ \varphi'_{t=\mathfrak{T}} &= +\lambda K\cos\sigma - 2\mathfrak{A}^2\eta_1\omega^2\mathfrak{c}\frac{(1+e^{-\mathfrak{c}\mathfrak{T}})^2}{\lambda^2+4\mathfrak{c}^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26_a)$$

A jobboldali értékek egyenlőkké teendők a (26) egyenletek jobboldali, ismert értékeivel, a miből azután a K és σ meghatározására két egyenlet adódik; ámde kifejezéseik meglehetősen bonyolódottak, úgy hogy ezeket itt nem fogjuk felírni.

2_D. *A kitérés közönséges számítása.*

a) Első számítási mód.

Ha a külső electromotorius erőnek $2\mathfrak{T}$ periodusa kicsinynek tekinthető az eszköz mozogható része $2T$ periodusa ellenében, akkor itt is szokás felvenni, mint az 50. lap 2_D. pontjában, hogy a mozogható rész az inductiós-áram egész tartama alatt nyugalmi helyzetében van; továbbá tekintsük, mint a 49. lapon, a földmágnesség befolyását elimináltnak. Ekkor a mozgás egyenlete:

$$\varphi_1'' + \lambda^2 \varphi_1 = \eta_1 i_1^2,$$

melynek integráljai a $(\mathrm{II}_D)_A$ és $(\mathrm{II}_D)_B$ egyenletek.

A közönséges számítás ezen egyenlet időbeli integráljából határozza meg a felfüggesztett rész azon sebesség-változását, melyet ez a rész az inductiós-áram hatása folytán szenved; e mellett az i_1 áramintensitásnak a (8), a (23), a (12) egyenletekből folyó értékeit használjuk fel és e közben φ_1-t zérussal egyenlőnek tekintjük.

Keletkezik így:

$$[\varphi']=\eta_1\int_0^\infty i_1^2dt=\mathfrak{A}^2\eta_1\Big\{\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\big[\tfrac{1}{2}(\omega^2+\mathfrak{c}^2)-2\omega e^{-\mathfrak{c}t}(\omega\cos(\omega t)-\mathfrak{c}\sin(\omega t))+$$
$$+\tfrac{1}{2}(\omega^2-\mathfrak{c}^2)\cos(2\omega t)-\omega\mathfrak{c}\sin(2\omega t)+\omega^2e^{-2\mathfrak{c}t}\big]dt+\omega^2(1+e^{-\mathfrak{c}\frac{\pi}{\omega}})^2\int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\infty}e^{-2\mathfrak{c}(t-\mathfrak{T})}dt\Big\}.$$

Tényleg végezve a jelzett integrátiókat, származik:

$$[\varphi']=\mathfrak{A}^2\eta_1\Big\{\tfrac{1}{2}(\omega^2+\mathfrak{c}^2)\frac{\pi}{\omega}-\Big[\frac{2\omega e^{-\mathfrak{c}t}}{\omega^2+\mathfrak{c}^2}(2\omega\mathfrak{c}\cos(\omega t)+(\omega^2-\mathfrak{c}^2)\sin(\omega t))\Big]_0^{\frac{\pi}{\omega}}+\Big[\tfrac{1}{2}\frac{\omega^2-\mathfrak{c}^2}{2\omega}\sin(2\omega t)+\frac{\omega\mathfrak{c}}{2\omega}\cos(2\omega t)\Big]_0^{\frac{\pi}{\omega}}-$$
$$-\frac{\omega^2}{2\mathfrak{c}}\Big[e^{-2\mathfrak{c}t}\Big]_0^{\frac{\pi}{\omega}}-\frac{\omega^2}{2\mathfrak{c}}(1+e^{-\mathfrak{c}\frac{\pi}{\omega}})^2\Big[e^{-2\mathfrak{c}(t-\frac{\pi}{\omega})}\Big]_{\frac{\pi}{\omega}}^{\infty}\Big\}=$$
$$=\mathfrak{A}^2\eta_1\Big\{\tfrac{1}{2}(\omega^2+\mathfrak{c}^2)\frac{\pi}{\omega}+\frac{4\omega^2\mathfrak{c}}{\omega^2+\mathfrak{c}^2}(1+e^{-\mathfrak{c}\frac{\pi}{\omega}})+\frac{\omega^2}{2\mathfrak{c}}(1-e^{-2\mathfrak{c}\frac{\pi}{\omega}})+\frac{\omega^2}{2\mathfrak{c}}(1+e^{-\mathfrak{c}\frac{\pi}{\omega}})^2\Big\}=$$
$$=\mathfrak{A}^2\eta_1\Big\{\frac{\pi}{2}\,\frac{\omega^2+\mathfrak{c}^2}{\omega}+\frac{4\omega^2\mathfrak{c}}{\omega^2+\mathfrak{c}^2}+\frac{4\omega^2\mathfrak{c}}{\omega^2+\mathfrak{c}^2}e^{-\mathfrak{c}\frac{\pi}{\omega}}+2\frac{\omega^2}{2\mathfrak{c}}+2\frac{\omega^2}{2\mathfrak{c}}e^{-\mathfrak{c}\frac{\pi}{\omega}}\Big\}.$$

$$[\varphi']=\mathfrak{A}^2\eta_1\Big\{\frac{\pi}{2}\,\frac{\omega^2+\mathfrak{c}^2}{\omega}+\frac{\omega^2}{\mathfrak{c}}\cdot\frac{\omega^2+5\mathfrak{c}^2}{\omega^2+\mathfrak{c}^2}(1+e^{-\mathfrak{c}\frac{\pi}{\omega}})\Big\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(28)$$

Ez az a sebesség, melylyel a közönséges felvétel értelmében, az eszköz mozgó része, az inductiós-áram hatásának megszűnése után, nyugalmi helyzetét elhagyja; e szerint az innen keletkezett lengés a következő kifejezés által lesz képviselve:

$$\varphi=\frac{\mathfrak{A}^2\eta_1}{\lambda}\Big\{\frac{\pi}{2}\,\frac{\omega^2+\mathfrak{c}^2}{\omega}+\frac{\omega^2}{\mathfrak{c}}\cdot\frac{\omega^2+5\mathfrak{c}^2}{\omega^2+\mathfrak{c}^2}(1+e^{-\mathfrak{c}\frac{\pi}{\omega}})\Big\}\sin\Big(\frac{\pi t}{T}\Big)\quad\ldots\ldots\ldots\quad(29)$$

β) Második számítási mód.

Igen sok esetben egyszerűség kedvéért oly eljárást szokás követni, hogy az áramintensitás, az öninductió elhanyagolásával, az Ohm-féle törvény egyedüli tekintetbe vétele mellett (mint azt már a 60. lap *β)* pontjában tettük) lesz számítva.

Ekkor egyszerűen az (1) egyenletből, 56. lap, képezzük közvetetlenül az áramintensitást:

$$i=\frac{E}{w}=\frac{A_0}{w}\omega\sin(\omega t),\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(22)$$

melyet mindaddig érvényesnek tekintünk, míg az E electromotorius erő működik.

Ekkor az eszköz felfüggesztett részének a földmágnességtől független (nem befolyásolt) mozgásának egyenlete leszen:

$$\varphi''+\lambda^2\varphi=\eta_1\frac{A_0^2}{w^2}\cdot\omega^2\sin^2(\omega t).$$

Az inductiós-áram tartama alatt a felfüggesztett részt nyugalmi helyzetében lévőnek tekintjük, azaz $\varphi=0$; e szerint az inductiós-áram működése közben, azaz a $t=0$-tól $t=\mathfrak{T}=\frac{\pi}{\omega}$-ig terjedő időközben nyert növekedése a sebbeségnek következő lesz:

$$[\varphi']=\eta_1\frac{A_0^2}{w^2}\omega\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\sin^2(\omega t)\omega dt=\eta_1\frac{A_0^2}{w^2}\omega\Big\{\tfrac{1}{2}\omega t-\tfrac{1}{4}\sin(2\omega t)\Big\}_0^{\frac{\pi}{\omega}}$$

$$[\varphi']=\eta_1\frac{\pi}{2}\omega\frac{A_0^2}{w^2}.$$

Ámde, az 57. lapon írt (4) és (8) egyenletek szerint áll:

$$\mathfrak{c}=\frac{w}{L_0};\quad A_0=\mathfrak{A}L_0\frac{\omega^2+\mathfrak{c}^2}{\omega},$$

úgy, hogy:

$$[\varphi']=\mathfrak{A}^2\eta_1\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(\omega^2+\mathfrak{c}^2)^2}{\omega\mathfrak{c}^2} \qquad (30)$$

Ez lesz az a sebesség, a melylyel az eszköz felfüggesztett része, ezen tárgyalási mód értelmében, elhagyja nyugalmi helyzetét; e szerint az így keletkezett lengést a következő kifejezés tűnteti elő:

$$\varphi=\frac{\mathfrak{A}^2\eta_1}{\lambda}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(\omega^2+\mathfrak{c}^2)^2}{\omega\mathfrak{c}^2}\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) \qquad (31)$$

Észreveszszük, hogy a *két közönséges számítási mód különböző lengési amplitudót szolgáltat.*

3_D. *Az első közelítés öszszehasonlítása a két közönséges számítással.*

Mivel a kitérésnek fentirt $(\mathrm{II}_D)_A$ és $(\mathrm{II}_D)_B$ formulái, 1_D. pontban még a csillapítás elhanyagolásával sem egyszerűsíthetők, ezen formuláknak a (29) és (31) formulákkal való öszszehasonlítása semmi áttekintést nem nyújthat.

A III. tábla jobb fele előtűnteti a kitérés, a sebesség és a gyorsulás görbéit az electrodynamometer mozogható részére nézve, a mint azok az első közelítésből és a két közönséges számítási módból következnek.

A használt formulák állandói következőképen lettek választva:

$$T=3{\cdot}14 \text{ másodpercz},\quad \frac{\pi}{\omega}=\mathfrak{T}=1{\cdot}57 \text{ másodpercz},\quad \mathfrak{c}=\frac{1}{\text{mp.}},\quad \frac{\mathfrak{A}^2\eta_1}{\lambda}\cdot\frac{\pi}{2}\,\frac{(\omega^2+\mathfrak{c}^2)^2}{\omega\mathfrak{c}^2}=3 \text{ centimeter.}$$

A nagyobb amplitudóval bíró vonalzott görbe megfelel a 2_D. pontban β) alatt említett számítási módnak; a kisebb amplitudóval bíró ellenben az α) alattinak.

A rajzok első harmada a $(\mathrm{II}_D)_A$ formula szerint számíttatott; a gyengén kihúzott négy görbe ezen formula négy tagjának felel meg a $t=0$-től $t=\frac{\pi}{\omega}=\mathfrak{T}$-ig terjedő közre nézve.

A rajzok többi része a $t=\mathfrak{T}$ időponttól kezdve érvényes és a $(\mathrm{II}_D)_B$ formula szerint számíttatott; itt is hozzásímul az idő folyamában a mozgás mindinkább ezen utóbbi formula első tagjához.

A 49. és 54. lapok 3_G. pontjaiban tett megjegyzések ezen viszonyokra nézve is fennállanak.

TARTALOMJEGYZÉK.

BEVEZETÉS.

1. Az electrodynamikus és az electromagnetikus inductió törvényei, mint a tapasztalat szigorú kifejezése.

2. Az inductió általános egyenleteinek alkalmazása az electrodynamometer jelenségeire.

ELSŐ RÉSZ.

1. Egyszerűsítő felvételek és feltevések.

2. Az electrodynamometer általános egyenleteinek felállítása.

3. Az electrodynamometer egyenleteiben fellépő tagok értékrendje. A mozogható rész symmetriája.

4. Az egyenletrendszerek áttekinthető előtűntetése.

MÁSODIK RÉSZ.

1. Az electrodynamometer egyenletrendszereinek különböző közelítési fokai.

2. Az electrodynamometer differentiál-egyenleteinek integrátiója.

HARMADIK RÉSZ.

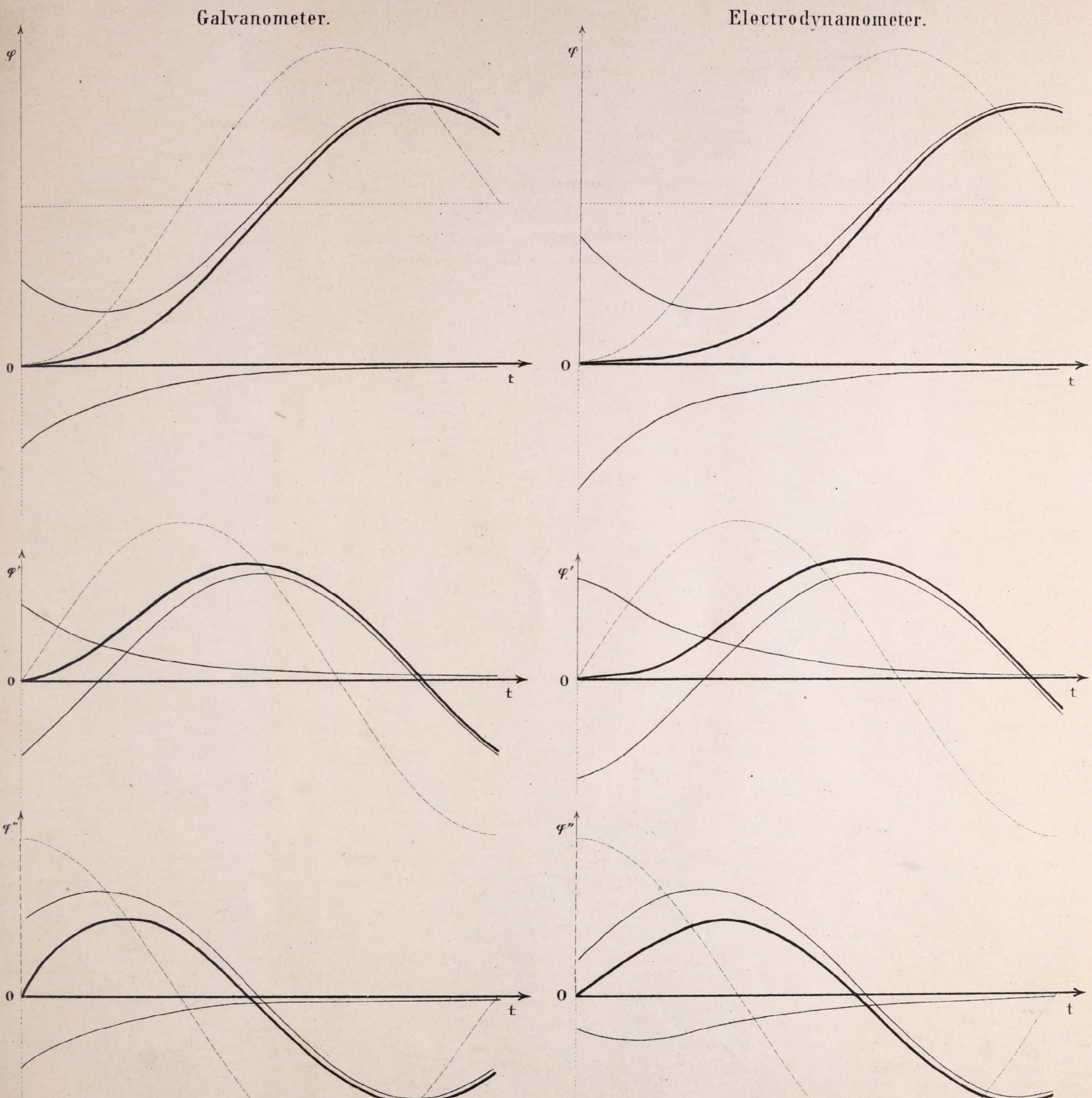
1. Az electrodynamometer egyenletrendszerei, midőn az áramintensitásoknak a mozgástól függő részei, mint variabilisek vannak bevezetve.

2. A különbségi egyenletrendszerek transformátiója és integrátiója.

FÜGGELÉK.

NÉHÁNY GALVANOMETRIKUS ÉS ELECTRODYNAMOMETRIKUS MÉRÉS MÓDSZEREI KÖZÖNSÉGES SZÁMÍTÁSÁNAK ÖSSZEHASONLÍTÁSA AZ ELSŐ KÖZELÍTÉS SZÁMÍTÁSÁVAL.

A kitérés, a sebesség és a gyorsulás görbéi, egy állandó electromotorius erő bekapcsolása után.



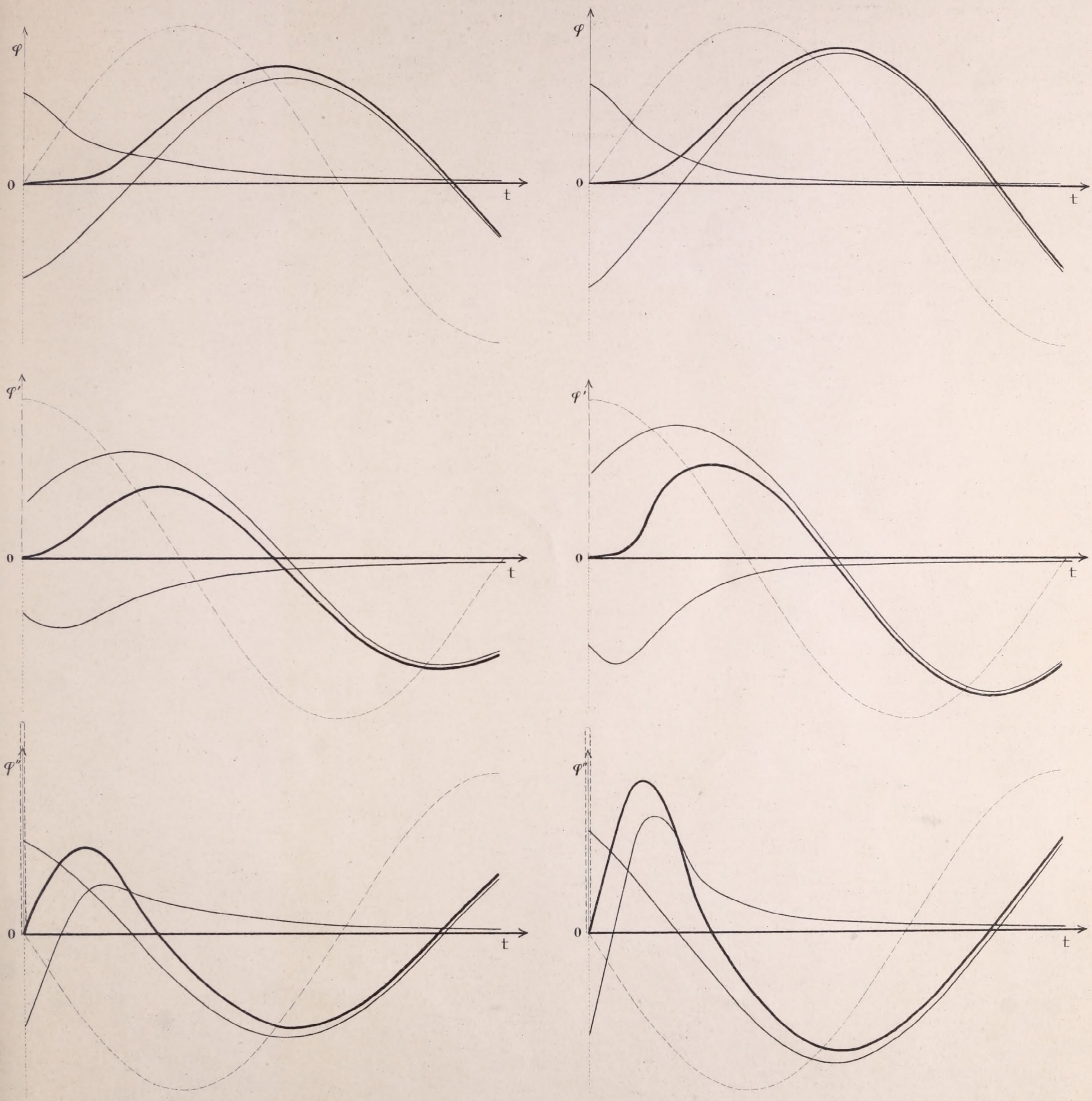
- - - - - - - - A közönséges számitás görbéje.

———————— Az első közelités szerinti számitás görbéje.

Grund Budapest.

A kitérés, a sebesség és a gyorsulás görbéi oly inductiós áram hatásánál, mely egy szomszédos áram zárása folytán keletkezik.

Galvanometer. Electrodynamometer.

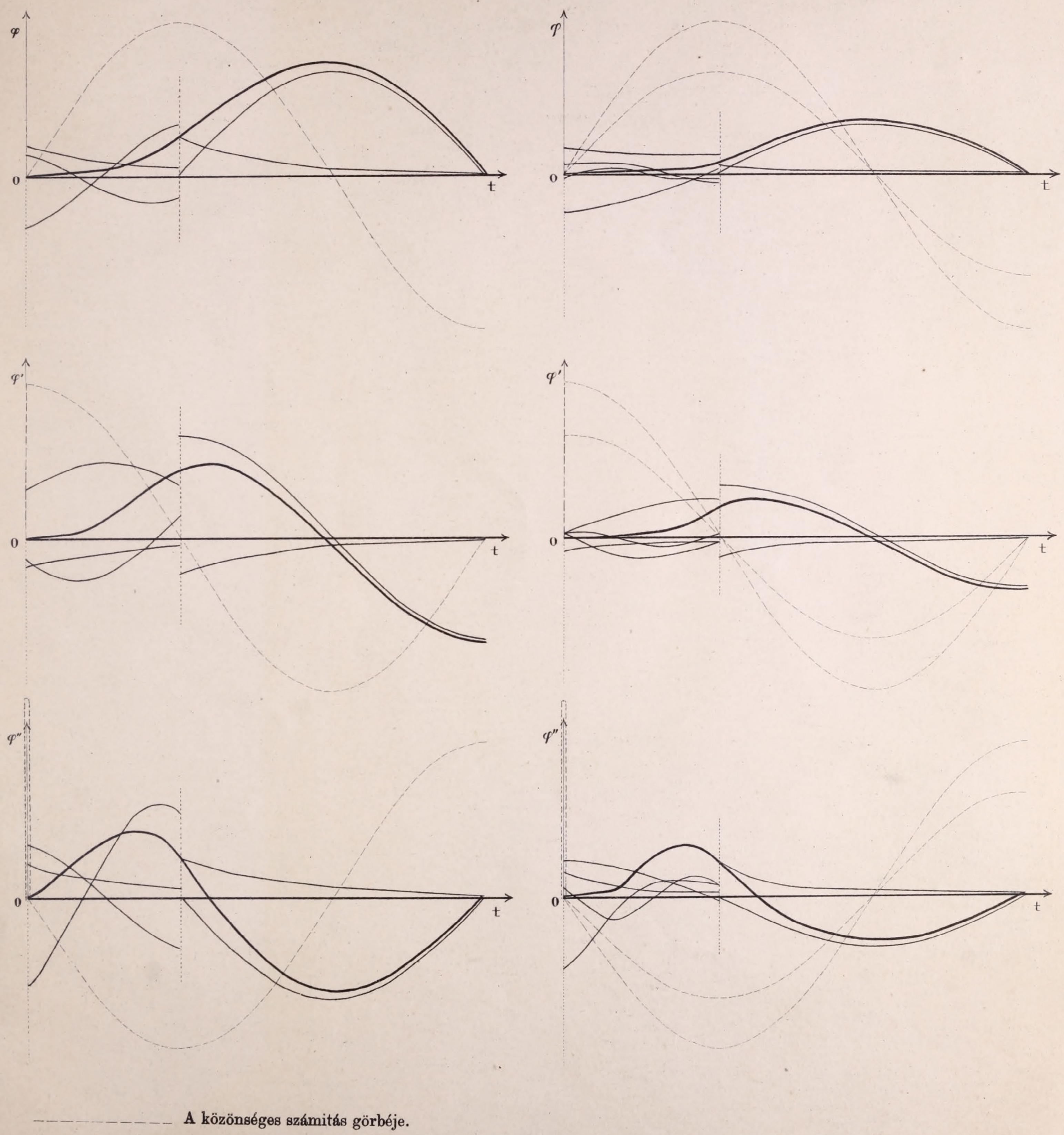


_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ A közönséges számitás görbéje.

____________ Az első közelités szerinti számitás görbéje.

A kitérés, a sebesség és a gyorsulás görbéi egy egyszerűen harmonikus electromotorius erőnek egy fél perioduson keresztül tartó hatása mellett.

Galvanometer. Electrodynamometer.



- - - - - - - - - A közönséges számitás görbéje.

——————— Az első közelités szerinti számitás görbéje.

Grund Budapest.